

Original research / Artículo original - Tipo 1

Exact solution and high frequency asymptotic methods in the wedge diffraction problem

Hernan G. Triana / hernan.garcia@correo.icesi.edu.co

Andrés Navarro Cadavid / anavarro@icesi.edu.co

Universidad Icesi, Cali-Colombia

ABSTRACT The Sommerfeld exact solution for canonical 2D wedge diffraction problem with perfectly conducting surfaces is presented. From the integral formulation of the problem, the Malyuzhinets solution is obtained and this result is extended to obtain the general impedance solution of canonical 2D wedge problem. Keller's asymptotic solution is developed and the general formulation of exact solution it's used to obtain general asymptotic methods for approximate solutions useful from the computational point of view. A simulation tool is used to compare numerical calculations of exact and asymptotic solutions. The numerical simulation of exact solution is compared to numerical simulation of an asymptotic method, and a satisfactory agreement found. Accuracy dependence with frequency is verified.

KEYWORDS Geometrical Theory of Diffraction, Asymptotic Methods, Computational Electromagnetics.

Solución exacta y métodos asintóticos de alta frecuencia en el problema de difracción por una cuña

RESUMEN Se presenta la solución exacta de Sommerfeld para el problema canónico bidimensional de difracción por una cuña con superficies perfectamente conductoras. A partir del planteamiento integral del problema, se presenta la solución de Malyuzhinets y se extiende el resultado para el caso de impedancia en las caras. Se desarrolla la solución asintótica de Keller para el problema y, a partir de la formulación integral de la solución exacta, se introducen los métodos generales para desarrollar soluciones asintóticas útiles desde el punto de vista computacional. Se utiliza una herramienta de simulación para comparar los resultados de computo numérico de la solución exacta y de una de las soluciones asintóticas del problema canónico. Se encuentra buen acuerdo y se verifica la dependencia de la precisión con la frecuencia para los métodos asintóticos.

PALABRAS CLAVE Teoría geométrica de la difracción; métodos asintóticos; electromagnetismo computacional.

Solução exata e métodos assintóticos de alta frequência no problema da difração por uma cunha

RESUMO Apresenta-se a solução exata de Sommerfeld para o problema canônico bidimensional de difração sobre uma cunha com superfícies perfeitamente condutoras. Apresenta-se a solução de Malyuzhinets a partir da abordagem global para o problema, e estende-se o resultado para o caso de impedância nas faces. Desenvolve-se a solução assintótica de Keller para o problema e a partir da formulação integral da solução exata, são introduzidos os métodos gerais para desenvolver soluções assintóticas úteis desde o ponto de vista computacional. É utilizada uma ferramenta de simulação para comparar os resultados de cálculo numérico da solução exata e de uma das soluções assintóticas do problema canônico. Encontra-se um bom acordo e verifica-se a dependência da precisão com a frequência para os métodos assintóticos.

PALAVRAS-CHAVE Teoria geométrica da difração, Métodos Assintóticos, Electromagnetismo Computacional.

I. Introduction

The diffraction of high frequency electromagnetic waves is a local phenomenon of considerable importance in the modeling of the signal propagation through a wireless channel. In the case of wedge diffractions (**FIGURE 1**), the diffracted field is proportional to the incident one in the diffraction point, and multiplied by a diffraction coefficient. This latter is determined by the local properties of the field and the geometry of the object at the Q diffraction point (Balanis, 1938). The calculation of the diffracted field in an edge geometry from these observations consists on a canonical problem addressed by using computational techniques. These techniques are divided in two groups: The High Frequency [HF] techniques, based on the expansion of the solution in terms of asymptotic series; and the numeric techniques based on the discretizing of the Maxwell equations. The numeric techniques present higher accuracy, but they require more CPU time and demand more memory; whilst, in the HF techniques the accuracy is enhanced with the frequency and the CPU time is independent of the frequency (Vico, Ferrando, Valero, Herranz & Antonio, 2009).

This study is performed considering the high frequency techniques, specifically the ones based on the optical ray method. These techniques consist on approximate models seeking to determine propagation, amplitude, phase, and polarization of the electromagnetic fields associated to the radiation of interest (the wavelength is considerably lower than the dimensions of the objects in the considered environment). The high frequency asymptotic solutions have been used in the development of modeling tools for radio wave propagation in indoor and outdoor environments (Guevara & Navarro, 2011). Recently, a detailed review related with the importance of the radio channel modeling tools by using optical ray tools has been performed (Navarro, Guevara & Gómez, 2014); consequently, the detailed study of the HF asymptotic techniques based on the optical ray combined with heuristic procedures, offers the possibility to refine the existing simulation and characterization tools (Navarro, Guevara, Tami, Rego & Moreira, 2015). These researches have also allowed to perform some calibration procedures of ray tracing models (Navarro, Guevara & Africano, 2012), and to use 3D videogame technology for both the channel modeling (Navarro, Guevara & Londoño, 2012) and the analysis of delay loss in millimetric waves considering indoor environments (Navarro et al., 2016).

I. Introducción

La difracción de ondas electromagnéticas de alta frecuencia es un fenómeno local de gran importancia en el modelamiento de la propagación de señales a través de un canal inalámbrico. En el caso de difracción por un borde **FIGURA 1**, el campo difractado es proporcional al campo incidente en el punto de difracción multiplicado por un coeficiente de difracción, el cual está determinado por las propiedades locales del campo y el contorno en el punto de difracción Q (Balanis, 1938). Calcular el campo difractado en un contorno de borde a partir de estas observaciones constituye un problema canónico que se aborda utilizando técnicas computacionales. Las técnicas computacionales para tratar este tipo de problemas se dividen en dos grupos: las técnicas de alta frecuencia [HF], que se basan en la expansión de la solución en términos de series asintóticas; y las técnicas numéricas, basadas en la discretización de las ecuaciones de Maxwell. Las técnicas numéricas arrojan mayor precisión, pero sus puntos débiles son el tiempo de CPU y el requerimiento de memoria mientras que, en las técnicas de HF la precisión aumenta con la frecuencia y el tiempo de CPU es independiente de la frecuencia (Vico, Ferrando, Valero, Herranz & Antonio, 2009).

Este estudio se desarrolla en el marco de las técnicas de alta frecuencia, específicamente las basadas en el método de rayo óptico. Estas técnicas consisten en modelos aproximados para determinar propagación, amplitud, fase y polarización de los campos electromagnéticos asociados a la radiación de interés (longitud de onda mucho menor que las dimensiones de los objetos del entorno considerado). Las soluciones asintóticas de alta frecuencia se han utilizado en el desarrollo de herramientas de modelamiento de propagación de ondas radio en ambientes interiores y exteriores (Guevara & Navarro, 2011).

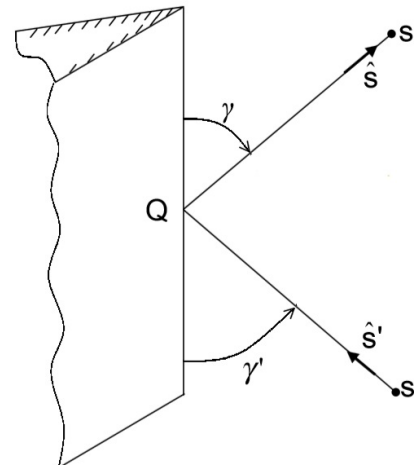


Figure 1. Diffraction in a border wedge outline: the rays model the incident field from an S' source and the diffracted field in an observation point (S). Presented here is also the s' field propagation vector and the s field propagation vector. *Difracción en un contorno de borde de cuña: los rayos modelan el campo incidente desde una fuente S' y el campo difractado en un punto de observación S , se indican además el vector de propagación del campo s' y los ángulos de incidencia γ' , y de difracción γ en el punto de difracción Q del borde*

Recientemente, se ha hecho una revisión detallada de la importancia de las herramientas de modelamiento de canal radio mediante técnicas de rayo óptico (Navarro, Guevara & Gómez, 2014) con lo que el estudio detallado de las técnicas asintóticas de alta frecuencia basadas en el rayo óptico, combinado con técnicas heurísticas desarrolladas más recientemente ofrece la posibilidad de refinar las herramientas de simulación y caracterización existentes (Navarro, Guevara, Tami, Rego & Moreira, 2015), llevar a cabo estudios de calibración de modelos de trazado de rayos (Navarro, Guevara & Africano, 2012) y utilizar tecnología de videojuegos 3D, tanto para el modelamiento de canal (Navarro, Guevara & Londoño, 2014), como para el análisis de pérdida de retardo en bandas de ondas milimétricas en ambientes interiores (Navarro et al., 2016). Todo lo anterior muestra que el estudio detallado de técnicas computacionales para el análisis de los procesos de difracción presentes en la propagación de ondas radio en ambientes interiores y exteriores es un campo de investigación de notable impacto en el presente y futuro desarrollo de las comunicaciones inalámbricas en nuestro país.

En este trabajo se presentan los aspectos fundamentales de la solución de Sommerfeld del problema canónico bidimensional de difracción en una cuña perfectamente conductora, a continuación se dirige la atención hacia aspectos generales de la solución de Mal'uzhinets, se presenta el esquema general para desarrollar soluciones asintóticas, se discuten tres tipos de soluciones asintóticas para el problema canónico bidimensional y, finalmente, se utiliza una herramienta de simulación para comparar numéricamente la solución exacta y una solución asintótica. El propósito es ofrecer una presentación que sirva como referencia para estudiantes e investigadores en nuestro contexto local.

II. Planteamiento del problema

Se considera el problema canónico bidimensional de la difracción por una cuña semi-infinita de borde recto, ángulo exterior α y superficies fronteras perfectamente conductoras, en un medio homogéneo, lineal e isotrópico. En el sistema de coordenadas cilíndricas escogido, el borde recto de la cuña está a lo largo del eje z , las caras planas de la cuña están ubicadas a lo largo de las direcciones $\phi=0$ y $\phi=\alpha$, la fuente radio es un filamento ubicado en la dirección $\phi=\phi_0$ a una distancia $r=r_0$ del borde de la cuña y el punto de observación se considera ubicado en (r,ϕ) . La geometría del problema se presenta en la **FIGURA 2**, existen tres regiones de interés caracterizadas por las componentes del campo en cada región, la frontera entre las regiones I y II se denomina frontera de reflexión ($\phi=\pi-\phi_0$) y la frontera entre las regiones II y III se denomina frontera de sombra ($\phi=\pi+\phi_0$).

III. Solución exacta

En 1896 Arnold Sommerfeld introdujo la integral de contorno, hoy conocida como integral de Sommerfeld, para estudiar el problema de la difracción de ondas planas por un plano semi infinito, con perfectas condiciones de frontera; unos años más tarde, extendió el análisis a difracción de ondas planas por un

These previous work reveal that the detailed study of computational techniques for the diffraction analysis process present in the radio wave propagation in indoor and outdoor environments is a research field of notable impact and, consequently, in the present and future of the development of the wireless communications in Colombia.

In this work, we present the fundamental aspects of the Sommerfeld solution of the bi-dimensional canonical problem of wedge diffraction in a perfectly conductive wedge. We also cover some general aspects of the Mal'uzhinets solution, we present the general scheme to develop asymptotic solutions and we discuss three of these solutions for the bi-dimensional canonical problem and, finally, we use a simulation tool to numerically compare the exact solution with an asymptotic one. The purpose is to offer a presentation useful as reference to students and researchers in the local context.

II. Problem formulation

We are considering the bi-dimensional canonical problem of the diffraction by a semi-infinite wedge of straight edges, with exterior angle α , and perfectly conductive boundary surfaces in a homogeneous, linear, and isotropic medium. In the chosen cylindrical coordinates system, the straight edge of the wedge is along the z axis, the plane faces of the wedge are located in the $\phi=0$ and $\phi=\alpha$ directions, the radio source is a filament located in the $\phi=\phi_0$ direction, in a distance $r=r_0$ from the edge of the wedge and the observation point is located in (r,ϕ) . The geometry of the problem is presented in **FIGURE 2**, where there are three interest regions, characterized by the field components on each region. Furthermore, the boundary between the regions I and II is called *reflection boundary* ($\phi=\pi-\phi_0$) and the boundary between the regions III and IV is called *shadow boundary* ($\phi=\pi+\phi_0$).

III. Exact solution

In 1896, Arnold Sommerfeld introduced the line integral —today known as Sommerfeld integral— to study the plane waves diffraction by a semi-infinite plane with perfect boundary conditions. A few years later, he extended the analysis to plane waves diffraction by an edge of a wedge with perfect boundary conditions (Sommerfeld, 1901). Nevertheless, the solution for the diffraction problem in an angular and arbitrary behavior with perfect boundary conditions was obtained by MacDonald through the variable separation and the transformation to the

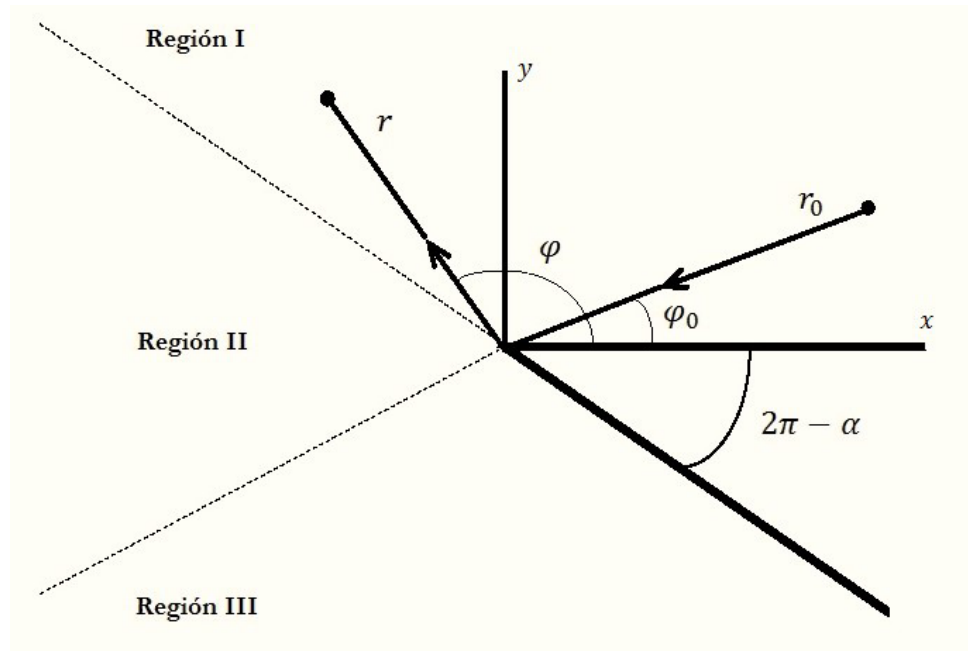


Figure 2. Geometry of the bi-dimensional canonical diffraction problem by a wedge: in the region I there are both incident, reflected, and diffracted fields; in the region II only incident and diffracted fields; and in the region III only diffracted field / Geometría del problema canónico bidimensional de difracción por una cuña: en la región I existen campos incidente, reflejado y difractado; en la región II, campo incidente y difractado; y en la región III, solo campo difractado

Sommerfeld integral (MacDonald 1902). A detailed treatment of the Sommerfeld work and posterior developments can be obtained from his *Mathematical Theory of Diffraction* ((Nagem, Zampolli & Sandri 2004). Likewise, it is possible to find detailed solutions to the wave diffraction problem, corresponding to the Dirichlet or Newman boundary conditions for the faces of the wedge (Oberhettinger, 1958; Petrashen, Nikolaev & Kousov, 1958; Tuzhilin, 1963; Bowman & Senior, 1970; Ambaud & Bergassoli, 1972; Felsen & Marcuvitz, 1978; Hadden & Pierce, 1981; DeWitt-Morette, Low, Schulman & Shiekh, 1986; Pierce, 1989).

All the previous work consider boundary conditions related with perfectly conductive surfaces. The general boundary conditions problem with impedance in the faces was solved by Malyuzhinets (1950) on his doctoral dissertation, presented in a series of articles considered as classical today (Malyuzhinets, 1955a, 1955b, 1958a, 1958b) and finally presented in a detailed and concise manner in a single article in 1958. In this latter, he presents his solution as a Sommerfeld integral, where the integrand includes a new special function called *Malyuzhinets function* (Malyuzhinets, 1958c). Subsequent contributions to the Malyuzhinets theory considered related developments with functional equations (Tuzhilin, 1970a, 1970b, 1971) and, even some asymptotic uniform solutions of far field for wedge scattering with impedance have been developed (Filippov, 1967).

borde de cuña con perfectas condiciones de frontera (Sommerfeld, 1901). Sin embargo, la solución para el problema de la difracción en un dominio angular arbitrario, con perfectas condiciones de frontera, fue obtenida por MacDonald por medio de separación de variables y luego transformada a la integral de Sommerfeld (MacDonald 1902). Un tratamiento detallado del trabajo de Sommerfeld y posteriores desarrollos se pueden leer en su *Mathematical Theory of Diffraction* (2004). De igual manera se pueden encontrar soluciones detalladas al problema de la difracción de ondas, correspondientes a condiciones de frontera de Dirichlet o de Newman para las caras de la cuña (Oberhettinger, 1958; Petrashen, Nikolaev & Kousov, 1958; Tuzhilin, 1963; Bowman & Senior, 1970; Ambaud & Bergassoli, 1972; Felsen & Marcuvitz, 1978; Hadden & Pierce, 1981; DeWitt-Morette, Low, Schulman & Shiekh, 1986; Pierce, 1989). Todas ellas consideran condiciones de frontera correspondientes a superficies perfectamente conductoras. El problema general de condiciones de frontera con impedancia en las caras fue resuelto por Malyuzhinets (1950) en su disertación doctoral, divulgada en una serie de artículos actualmente considerados clásicos (Malyuzhinets, 1955a, 1955b, 1958a, 1958b) y finalmente presentado de manera detallada y concisa en un solo artículo en 1958, en donde presenta su solución como una integral de Sommerfeld, cuyo integrando incluye una nueva función especial denominada función de Malyuzhinets (Malyuzhinets, 1958c). Posteriores contribuciones a la teoría de Malyuzhinets consideran desarrollos relacionados con ecuaciones funcionales (Tuzhilin, 1970a, 1970b, 1971) que permiten extender el enfoque de Malyuzhinets a condiciones de frontera más elaboradas (Tuzhilin, 1973) incluso se han desarrollado soluciones asintóticas uniformes de campo leja-

no para dispersión por cuña con impedancia (Filippov, 1967). Paralelo a estos resultados también se han desarrollado procedimientos numéricos para computar la función especial de Malyuzhinets (Zavatskii & Sakharova, 1961) y deducir algunas representaciones analíticas útiles (Zavatskii & Sakharova, 1967; Sakharova, 1970). Con el creciente interés en cómo las propiedades de los materiales de una cuña influyen sobre los procesos de dispersión y difracción, cuando las cuñas no son perfectamente conductoras, se requieren maneras simples de computar la función de Malyuzhinets. Algunos investigadores han obtenido expresiones analíticas aproximadas para el problema del plano semi infinito (Volakis & Senior, 1985) y se han extendido estas funciones analíticas para el problema de difracción en una cuña (Herman, Volakis & Senior, 1987) e incluso, se han desarrollado soluciones de alta precisión utilizando polinomios de Chebyshev para cuñas de varios ángulos (Hongo & Nakajima, 1986) y recientemente se ha utilizado una regla de cuadratura para obtener una solución exacta cerrada al evaluar una forma integral conocida de la función de Malyuzhinets (Aboserwal & Balanis, 2014). En este apartado se presenta el método para obtener la solución de Sommerfeld en forma de series infinitas. Aunque la solución original fue obtenida en forma integral y luego expresada en forma de series infinitas, el interés aquí es llegar, de manera pronta, a una solución exacta que pueda ser evaluada numéricamente y utilizarla para calibrar los métodos asintóticos.

Los problemas relacionados con radiación y propagación de ondas electromagnéticas implican la solución de las ecuaciones de Maxwell en el medio de propagación (Sevgi, 2014):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

Donde, E y H son las intensidades de los campos eléctrico y magnético respectivamente, $D = \epsilon E$ es la densidad de flujo eléctrico, $B = \mu H$ es la densidad de flujo magnético, M es la fuente magnética de densidad de corriente, $J = \sigma E + J_v$ es la fuente eléctrica de densidad de corriente de conducción ($J_c = \sigma E$) y de convección ($J_v = qv$), ϵ es la permitividad eléctrica del medio, μ es la permeabilidad magnética del medio, v es la conductividad del medio y v la velocidad de los portadores de carga. Se considera un medio homogéneo, lineal, isotrópico sin pérdidas y una dependencia temporal de los campos del tipo $e^{i\omega t}$, ω es la frecuencia angular del campo. entonces:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \quad (6)$$

En el caso considerado de difracción por una cuña además de las ecuaciones de Maxwell se requieren las condiciones de frontera asociadas a las superficies de la cuña. Los problemas con condiciones de frontera se modelan de manera convenient-

Parallel to these results, there also have been developments in numeric procedures to compute the Malyuzhinets special function (Zavatskii & Sakharova, 1961) and deduce some useful analytic representations (Zavatskii & Sakharova, 1967; Sakharova, 1970). With the growing interest in how the properties of the materials in a wedge have influence in the scattering and diffraction processes when the wedges are not perfectly conductive, more simple procedures to compute the Malyuzhinets function are required. Some researchers have obtained approximate analytic expressions for the semi-infinite plane (Volakis & Senior, 1985) and these solutions have been expanded for the diffraction problem in a wedge (Herman, Volakis & Senior, 1987). Also, some high accuracy solutions using Chebyshev polynomials for wedges in several angles have been developed (Hongo & Nakajima, 1986). Recently, the quadrature rule to obtain an exact and close solution with the assessment of an integral form of the Malyuzhinets function has been proposed (Aboserwal & Balanis, 2014).

In this section, we also present the method to obtain the Sommerfeld solution in terms of infinite series. Even though the original solution was obtained in terms of integrals and then expressed in terms of infinite series, the interest here is to achieve —as soon as possible— an exact solution that can be numerically assessed and used to calibrate the asymptotic methods.

The problems related with radiation and propagation of electromagnetic waves entail the solution of the Maxwell equations in the propagation medium (Sevgi, 2014):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

Where E and H are the intensities of the electric and magnetic fields —respectively—, $D = \epsilon E$ is the electric flux density, $B = \mu H$ is the magnetic field density, M is the magnetic source of current density, $J = \sigma E + J_v$ is the electric source of conduction ($J_c = \sigma E$) and convection ($J_v = qv$) current density, ϵ is the electric permittivity of the medium, μ is the magnetic permeability of the medium, σ is the medium conductivity, and v is the speed of the charge carriers. A homogeneous, lineal, isotropic, and no-loss medium is considered; besides of a temporary dependence of the type $e^{i\omega t}$ fields (with ω as the field angular frequency). Hence:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \quad (6)$$

In the considered case (wedge diffraction), besides of the Maxwell equations, the boundary conditions associated to the wedge surfaces are required. The boundary condition problems are modeled in a convenient way through the use of potentials. Punctually, given the fact that \mathbf{H} is a solenoidal field ($\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$), \mathbf{H} it can be represented as the curl of some other \mathbf{A} vector function, called *magnetic vector potential*:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (7)$$

By carrying (5) to (1) and considering (7) for impressed magnetic current density $M(r)=0$, we obtain:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + i\omega \mathbf{A}) = 0$$

The first term in the parenthesis is the electric field in a static way, which is a gradient field. Hence, the electric potential vector is defined as follows:

$$-\nabla \Phi = \mathbf{E} + i\omega \mathbf{A} \quad (8)$$

It is clear that this potential satisfies the immediately previous condition of null curl. Now, the expressions for the magnetic and electric potentials are carried to (2) and the result is as follows:

$$-\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\nabla^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \mathbf{A} - \nabla(i\omega \epsilon \mu \Phi + \nabla \cdot \mathbf{A})$$

Where the divergence of \mathbf{A} has to be specified. A convenient choice is the Lorentz condition (Sevgi, 2012), also known as *Lorentz gauge* (Thide, 2003):

$$-i\omega \epsilon \mu \Phi = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

In accordance with this condition, the previous expression is reduced to:

$$-\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{A} \quad (9)$$

Where $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ is the intensity of the wave vector. This latter is the vector wave equation and it establishes that for an electric source with \mathbf{J} current distribution, the \mathbf{A} vector potential can be calculated and \mathbf{E} and \mathbf{H} are determined by (7) and by:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

The latter equation is directly obtained from (2) and (5). The purpose now is to solve the bi-dimensional canonical problem presented in FIGURE 2 through the vector wave

te mediante el uso de potenciales. En particular, puesto que \mathbf{H} es un campo solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$), se puede representar como el rotacional de alguna otra función vectorial \mathbf{A} , llamada potencial vectorial magnético:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (7)$$

Al llevar (5) a (1) teniendo en cuenta (7) y considerando el caso de fuente magnética de densidad de corriente $M(r)=0$, se obtiene:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + i\omega \mathbf{A}) = 0$$

El primer término dentro del paréntesis es el campo eléctrico en forma estática, el cual es un campo gradiente, entonces el potencial escalar eléctrico se define como:

$$-\nabla \Phi = \mathbf{E} + i\omega \mathbf{A} \quad (8)$$

Y es claro que este potencial satisface la condición inmediatamente anterior de rotacional nulo. Ahora se llevan las expresiones para los potenciales magnético y eléctrico a (2) y se obtiene:

$$-\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\nabla^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \mathbf{A} - \nabla(i\omega \epsilon \mu \Phi + \nabla \cdot \mathbf{A})$$

Donde la divergencia de \mathbf{A} debe ser especificada. Una elección conveniente es la condición de Lorentz (Sevgi 2012) o también conocida como *gauge* de Lorentz (Thide, 2003):

$$-i\omega \epsilon \mu \Phi = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

De acuerdo con esta condición, la expresión anterior se reduce a:

$$-\mu \mathbf{J}(\mathbf{r}) = (\nabla^2 + k^2) \mathbf{A} \quad (9)$$

Donde, $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ es la intensidad del vector de onda. Esta última es la ecuación vectorial de onda y establece que para una fuente eléctrica de distribución de corriente dada \mathbf{J} el potencial vectorial \mathbf{A} puede calcularse y entonces \mathbf{E} y \mathbf{H} quedan determinados por (7) y por:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = i\omega \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (10)$$

La cual se obtiene directamente de (2) y (5). Se trata entonces de resolver el problema canónico bidimensional de la FIGURA 2, mediante la ecuación vectorial de onda (9) sometida a las condiciones de frontera de una cuña perfectamente conductora. Sea u la componente z del campo de radiación en coordenadas cilíndricas; puesto que la fuente es un filamento (fuente lineal) en (r_0, ϕ_0) , teniendo en cuenta las relaciones (7) y (8) en (9), puede deducirse que el campo fuera de la cuña, $0 \leq \phi \leq \alpha$, satisface la ecuación:

$$(\nabla^2 + k^2)u = I_0 \delta(r - r_0, \phi - \phi_0) \quad (11)$$

Y las condiciones de frontera:

$$u_s = 0 \quad \text{Soft (Dirichlet)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u_h = 0 \quad \text{Hard (Newman)} \quad (13)$$

Sobre las caras $\phi=0$ y $\phi=\alpha$, las cuales corresponden a una cuña perfectamente conductora. Aquí u_z es la componente z de la in-

tensidad del campo eléctrico E , mientras que u_h es la componente z de la intensidad del campo magnético H . La ecuación de onda debe ser expresada en coordenadas cilíndricas, luego para los puntos fuera de la vecindad del filamento, (11) se transforma en:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u + k^2 u = 0 \quad (14)$$

Utilizando separación de variables se asume una solución del tipo (Weinberger, 1965):

$$u = R(r)\Phi(\varphi)$$

Que al llevarse a (14) y realizar algunas transformaciones provee el par de ecuaciones separadas:

$$x^2 R_{xx} + x R_x + (x^2 - v_l) R = 0 \quad \text{with} \quad x = kr \quad (15)$$

$$\Phi_{\varphi\varphi} + v_l \Phi = 0 \quad (16)$$

La función Φ y las constantes de separación se determinan mediante las condiciones de frontera. En el caso de condiciones de frontera suaves dadas por (12) se obtiene:

$$\Phi = \sin(v_l \varphi) \quad v_l = l \frac{\pi}{\alpha} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

La solución a la ecuación radial de Bessel (15) puede expresarse en términos de las funciones de Bessel $J_{v_l}(kr)$ y las funciones de Hankel $H_{v_l}^{(j)}(kr)$. Las primeras aplican en los puntos de la región $r \leq r_0$ ya que son finitas en $r=0$ y las segundas en los puntos de la región $r \geq r_0$ ya que satisfacen la condición de radiación de Sommerfeld muy lejos del borde (Ufimtsev, 1957). Así la solución para la ecuación (15) es:

$$u_s = \sum_{l=1}^{\infty} a_l J_{v_l}(kr) H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \leq r_0 \quad (18)$$

$$u_s = \sum_{l=1}^{\infty} a_l J_{v_l}(kr_0) H_{v_l}^{(1)}(kr) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \geq r_0 \quad (19)$$

Con v_l dado como en (17). Similares expresiones se obtienen para u_h de manera que en este análisis se considerara solo la componente z de la intensidad del campo eléctrico u_s . El coeficiente a_l se encuentra aplicando el teorema de Green al campo u_s en una conveniente región y su correspondiente contorno en la vecindad de la fuente lineal de excitación del campo. Puede mostrarse que (Ufimtsev, 1957):

$$a_l = \frac{\pi}{i\alpha} I_0$$

La expresión para el campo total u_s excitado por la fuente lineal externa en el caso considerado de condiciones de frontera suaves es entonces:

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum_{l=1}^{\infty} J_{v_l}(kr) H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \leq r_0 \quad (20)$$

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum_{l=1}^{\infty} J_{v_l}(kr_0) H_{v_l}^{(1)}(kr) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \geq r_0 \quad (21)$$

Esta expresión relaciona la excitación del campo debida a una onda cilíndrica con el termino fuente $I_0 \delta(r-r_0, \phi-\phi_0)$ alrededor de la cuña en la región $0 \leq \phi \leq \alpha$, $0 \leq r \leq \infty$. Sin embargo, nos interesa considerar la excitación del campo en la región próxima a la cuña debida una onda plana.

equation (9) submitted to the boundary conditions of a perfectly conductive wedge. Let u the z component of the radiation field in cylindrical coordinates; given the fact that the source is a filament (lineal source) in (r_0, ϕ_0) and considering the relations (7) and (8) in (9), it can be deduced that the field outside the wedge, $0 \leq \phi \leq \alpha$, satisfies the following equation:

$$(\nabla^2 + k^2)u = I_0 \delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0) \quad (11)$$

and the boundary conditions:

$$u_s = 0 \quad \text{Soft (Dirichlet)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u_h = 0 \quad \text{Hard (Newman)} \quad (13)$$

In the faces $\phi=0$ and $\phi=\alpha$, which correspond to a perfectly conducting wedge. Here, u_s is the z component of the electric field intensity E , whilst u_h is the z component of the magnetic field H . The wave equation has to be expressed in cylindrical coordinates in order to transform (11) for the points outside the filament vicinity as follow:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u + k^2 u = 0 \quad (14)$$

Using variable separation, we assume a solution of the type (Weinberger, 1965):

$$u = R(r)\Phi(\varphi)$$

that, when carried to (14) and perform some transformations, it provides the pair of separated equations:

$$x^2 R_{xx} + x R_x + (x^2 - v_l) R = 0 \quad \text{with} \quad x = kr \quad (15)$$

$$\Phi_{\varphi\varphi} + v_l \Phi = 0 \quad (16)$$

The Φ function and the separation constants are determined through boundary conditions. In the case of the soft boundary conditions provided by (12), we obtain:

$$\Phi = \sin(v_l \varphi) \quad v_l = l \frac{\pi}{\alpha} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

The solution to the Bessel radial equation (15) can be expressed in terms of the $J_{v_l}(kr)$ Bessel and $H_{v_l}^{(j)}(kr)$ Hankel functions. The first ones are useful in the $r \leq r_0$ region points, since they are finite in $r=0$; the latter ones are useful in the $r \geq r_0$ region points, since they satisfied the Sommerfeld radiation condition far from the edge (Ufimtsev, 1957). Consequently, the solution for (15) is:

$$u_s = \sum_{l=1}^{\infty} a_l J_{v_l}(kr) H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \leq r_0 \quad (18)$$

$$u_s = \sum_{l=1}^{\infty} a_l J_{v_l}(kr_0) H_{v_l}^{(1)}(kr) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \geq r_0 \quad (19)$$

with v_l as in (17). Similar expressions are obtained for u_h , consequently, in this analysis we will only consider the z component of the electric field intensity u_s . The a_l coefficient can be found by applying the Green theorem to the u_s field in a convenient region and its corresponding contour in the vicinity of the linear source of field excitation. It can be shown that (Ufimtsev, 1957):

$$a_l = \frac{\pi}{i\alpha} I_0$$

The expression for the total field u_s excited by the external lineal source in the considered case of soft boundary conditions is:

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum_{l=1}^{\infty} J_{v_l}(kr) H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \leq r_0 \quad (20)$$

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 \sum_{l=1}^{\infty} J_{v_l}(kr_0) H_{v_l}^{(1)}(kr) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad r \geq r_0 \quad (21)$$

This expression relates the excitation of the field due to a cylindrical wave with the source term $I_0 \delta(r-r_0, \phi-\phi_0)$ around the wedge in the region $0 \leq \phi \leq \alpha$, $0 \leq r \leq \infty$. Nevertheless, we are interested in considering the field excitation in the region *next* to the wedge due to a plane wave. For this reason, the reader should suppose that the linear source of excitation is very far of the wedge border, this allows the use of the asymptotic expression of the Hankel function (Balanis, 1989):

$$H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \sim H_0^{(1)}(kr_0) e^{-\frac{\pi}{2} v_l}$$

Consequently, the field equation (20) in the region $r < r_0$ is now:

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad (22)$$

or:

$$u_s = \frac{\pi}{2i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) [\cos v_l(\varphi - \varphi_0) - \cos v_l(\varphi + \varphi_0)] \quad (23)$$

The series coefficient can be expressed as follows:

$$u_0 = \frac{\pi}{4i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \quad (24)$$

For this reason, it is clear that for $r_0 \rightarrow \infty$, $I_0 \rightarrow \infty$ and the following field can be considered as a plane wave travelling towards the wedge from the direction $\phi = \phi_0$,

$$u^{inc} = u_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (25)$$

This constant amplitude field corresponds to the geometrical optics field, and the reflected field associated (reflection law) can be expressed by changing the sign in the argument difference in the exponent. These fields can be taken by fixing the constant amplitude to the unitary

Para ello supóngase la fuente lineal de excitación del campo muy lejos del borde de la cuña de manera que pueda utilizarse la expresión asintótica de la función de Hankel (Balanis, 1989):

$$H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \sim H_0^{(1)}(kr_0) e^{-\frac{\pi}{2} v_l}$$

Con lo que la ecuación de campo (20) en la región $r < r_0$ toma la forma:

$$u_s = \frac{\pi}{i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) \sin v_l \varphi_0 \sin v_l \varphi \quad (22)$$

O bien:

$$u_s = \frac{\pi}{2i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) [\cos v_l(\varphi - \varphi_0) - \cos v_l(\varphi + \varphi_0)] \quad (23)$$

Se puede expresar el coeficiente de la serie como:

$$u_0 = \frac{\pi}{4i\alpha} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \quad (24)$$

Con lo que resulta claro que para $r_0 \rightarrow \infty$, $I_0 \rightarrow \infty$, el siguiente campo puede interpretarse como una onda plana viajando hacia la cuña proveniente de la dirección $\phi = \phi_0$,

$$u^{inc} = u_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (25)$$

Este campo de amplitud constante corresponde al campo de la óptica geométrica y, el campo reflejado asociado (ley reflexión) puede expresarse cambiando el signo en la diferencia del argumento en la exponencial. Estos campos pueden tomarse fijando la amplitud constante al valor unitario sin pérdida de generalidad debido a la linealidad del problema de la difracción (Baibich, Lyalinov & Grikurov, 2008). La ecuación de campo (23) puede entonces escribirse en la forma:

$$u_s = u_0 [u(kr, \varphi - \varphi_0) - u(kr, \varphi + \varphi_0)] \quad (26)$$

Donde,

$$u(kr, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} \epsilon_l e^{-\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) \cos v_l \psi \quad \epsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = 1 \quad (27)$$

Las ecuaciones (26) y (27) determinan el campo total (exactamente la componente z de la intensidad del campo total) generado por una onda plana incidente en la cuña perfectamente reflectante de la FIGURA 2 (Sommerfeld, 1935). El campo difractado puede calcularse restando las componentes de la óptica geométrica necesarias según el caso:

$$\frac{u_s^d}{u_0} = \frac{u_s}{u_0} - u_s^{GO} \quad (28)$$

Para la condición de iluminación de una cara considerada en este estudio (FIGURA 2):

$$u_s^{GO} = \begin{cases} e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} - e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} & 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \text{ Region I} \\ e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0 \text{ Region II} \\ 0 & \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha \text{ Region III} \end{cases} \quad (29)$$

Como se indicó, Sommerfeld presentó su solución exacta del problema en una forma integral y, a partir de la integral, obtuvo la solución en series infinitas dada en (26) y (27). Aquí se ha procedido en un orden distinto, puesto que interesa obtener

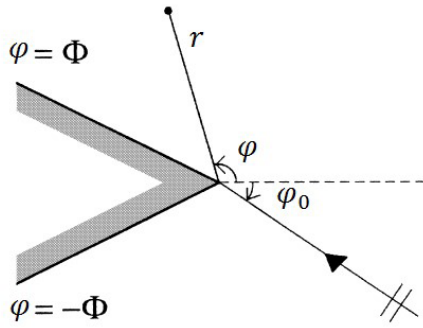


Figure 3. Schematic representation of the bi-dimensional canonical problem of Figure 2 by using another reference system, more convenient for the integral presentation of the solution / Representación esquemática del problema canónico bidimensional de la Figura 2 utilizando otro sistema de referencia más conveniente para la presentación integral de la solución

lo más inmediatamente posible, una expresión de la solución exacta que se pueda evaluar numéricamente en unos casos particulares y, entonces, utilizarla como referencia al presentar los métodos asintóticos de solución, los cuales permiten computar las soluciones para otros casos, con menos requerimientos de procesamiento. Sommerfeld introdujo también expresiones asintóticas para su solución, las cuales son bien conocidas y se pueden obtener por el método de fase estacionaria (Copson, 1965; Murray, 1984); un procedimiento usual en los métodos asintóticos que se discutirán en el siguiente apartado. La expresión asintótica para la solución exacta del campo difractado en el caso considerado aquí tiene la forma ($n=\alpha/\pi$):

$$u_s^d = u_0 \frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})} \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{2\pi kr}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi-\varphi_0}{n} \right)^{-1} - \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi+\varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] \quad (30)$$

La presentación integral de la solución que se considera a continuación, no es la misma que utilizó Sommerfeld en su trabajo; sin embargo, es conveniente para la discusión actual, ya que, además de servir como referencia para el esquema general utilizado en el desarrollo de soluciones asintóticas, que son útiles desde el punto de vista computacional y que serán presentadas en el apartado siguiente, permite introducir el enfoque de Malyuzhinets, que conduce a soluciones exactas para condiciones de frontera más generales. En la **FIGURA 3** se muestra una conveniente representación del problema canónico bidimensional para el análisis que sigue.

La solución al problema canónico bidimensional planteado en la **FIGURA 3** puede obtenerse explícitamente en la forma de una integral de Sommerfeld del tipo (Baibich, Lyalinov & Grikurov, 2008):

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ + \gamma_-}^{\square} e^{-ikr \cos(z)} s(\varphi + z) dz \quad (31)$$

La cual resuelve la ecuación de Helmholtz y satisface las condiciones de radiación en el infinito y de suavidad en la vecindad del borde (condiciones de Meixner). El contorno de integración γ_{\pm} (contorno de Sommerfeld) se esquematiza en la **FIGURA 4**. Se asume $kr > 0$, la función $s(z)$ es regular dentro

value without losing generality. This due to the linearity of the diffraction problem (Baibich, Lyalinov & Grikurov, 2008). The field equation (23) can be written as follows:

$$u_s = u_0 \cdot [u(kr, \varphi - \varphi_0) - u(kr, \varphi + \varphi_0)] \quad (26)$$

where,

$$u(kr, \psi) = \frac{2\pi}{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l e^{-i\frac{\pi}{2} \nu_l} J_{\nu_l}(kr) \cos \nu_l \psi \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 1 \quad (27)$$

Equations (26) and (27) determine the total field (exactly the z component of the field total intensity) generated by an incident plane wave in the perfectly reflecting wedge (showed in **FIGURE 2**) (Sommerfeld, 1935). The diffracted field can be calculated by subtracting the components of the geometric optics, necessary as the case requires:

$$\frac{u_s^d}{u_0} = \frac{u_s}{u_0} - u_s^{GO} \quad (28)$$

For the single-side illumination condition considered in this study (**FIGURE 2**):

$$u_s^{GO} = \begin{cases} e^{-ikr \cos(\varphi-\varphi_0)} - e^{-ikr \cos(\varphi+\varphi_0)} & 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \text{ Region I} \\ e^{-ikr \cos(\varphi-\varphi_0)} & \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0 \text{ Region II} \\ 0 & \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha \text{ Region III} \end{cases} \quad (29)$$

As we previously mentioned, Sommerfeld presented his exact solution of the problem in an integral form. From this integral, he obtained the solution in infinite series—presented in (26) and (27)—. Here, we proceeded in a different order, since our interest is in the gathering—as soon as possible—of an expression of the exact solution capable to be numerically assessed in certain particular cases. This expression can be used as reference when the asymptotic solution methods are presented. These latter allow the calculation of the solutions for other cases with less processing requirements.

Sommerfeld also presented asymptotic expressions for his solution, which are well known and they can be obtained by the stationary phase method (Copson, 1965; Murray, 1984); a usual procedure in the asymptotic methods that will be discussed in the following section. The asymptotic expression for the exact solution of the diffracted field in the considered case has the form ($n=\alpha/\pi$):

$$u_s^d = u_0 \frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})} \sin \frac{\pi}{n}}{\sqrt{2\pi kr}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi-\varphi_0}{n} \right)^{-1} - \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi+\varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] \quad (30)$$

The integral presentation of the solution to be considered next is not the same that Sommerfeld used in his work. However, it is convenient for the actual discussion since, besides of being appropriate as a reference for the general

scheme used in the development of asymptotic solutions—useful from the computational point of view—, allows the introduction of the Maluzhinets approach. This latter entails to exact solutions for more general boundary conditions. In **FIGURE 3**, we present a convenient representation of the bi-dimensional canonical problem for the upcoming analysis.

The solution to the bi-dimensional canonical problem laid out in **FIGURE 3** can be explicitly obtained in the form of a Sommerfeld integral as follows (Baibich, Lyalinov & Grikurov, 2008):

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ + \gamma_-}^{\square} e^{-ikr \cos(z)} s(\varphi + z) dz \quad (31)$$

Equation (31) solves the Helmholtz equation and it satisfies the radiation conditions in the infinite and softness in the edge vicinity (Meizner conditions). The integration contour γ_{\pm} (Sommerfeld contour) is schematized in **Figure 4**. The reader might assume that $kr > 0$, the $s(z)$ function is regular in the integration contour, but arbitrary in any other aspect; besides, it satisfies the following condition:

$$|s(z)| \leq ae^{\delta |Imz|}, \quad \delta > 0 \quad (32)$$

when $|Imz| \rightarrow \infty$. The a coefficient is a positive constant.

The substitution of (31) in the Dirichlet boundary conditions (13) considering the estimate (32) produces a homogeneous system of coupled functional equations known as the Maluzhinets equations. Let be an $s(z)$ function satisfies the Maluzhinets equations, it satisfies the estimate (32) and it does not have singularities in the $|Re z| \leq \phi$ band, except by the simple pole in $z = \phi_0$. Consequently, the integral (31) with the mentioned $s(z)$ function is the solution to the considered diffraction problem and it is reduced to (Osipov & Norris, 1999):

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ + \gamma_-}^{\square} \frac{\mu \cos \mu \phi_0}{\sin \mu(z + \varphi) - \sin \mu \phi_0} e^{-ikr \cos(z)} dz \quad (33)$$

where $\mu = \pi(2\phi)^{-1}$. In other words, the diffraction problem is reduced to an analytic functions problem. Besides, there is a correspondence between the plane waves propagated in the exterior of the wedge and the (simple) poles of the $s(z)$ function. Punctually, the incident wave $u^{inc} = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)}$ corresponds to the pole (with the residue being equal to one) in $z = \phi_0$, with the condition $-\phi < \phi_0 < \phi$. In the general case of a wedge with impedance in the faces, the field in the angular domain presented here is governed by the Helmholtz equation:

$$(\nabla^2 + k^2)u = 0$$

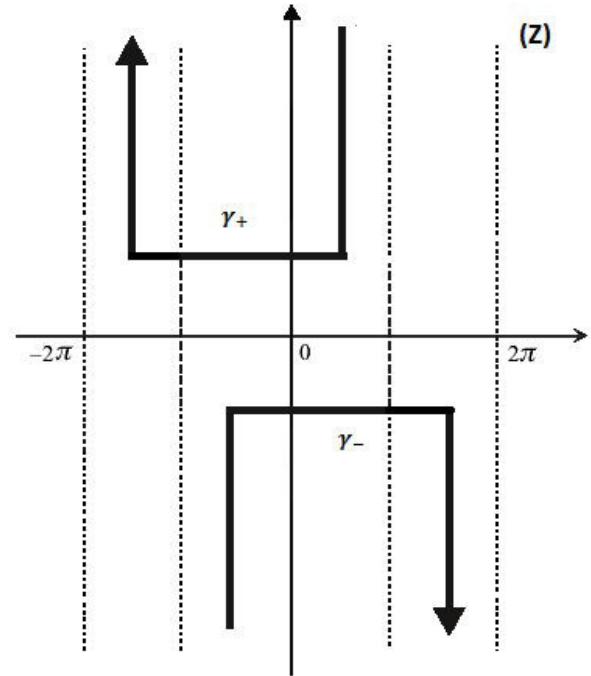


Figure 4. The Sommerfeld contour γ_{\pm} for the integral solution of the canonical problem illustrated in Figure 3 / El contorno de Sommerfeld γ_{\pm} para la solución integral del problema canónico ilustrado en la Figura 3

del contorno de integración, pero arbitraria en cualquier otro aspecto y satisface la condición:

$$|s(z)| \leq ae^{\delta |Imz|}, \quad \delta > 0 \quad (32)$$

Cuando $|Imz| \rightarrow \infty$. El coeficiente a es una constante positiva.

La sustitución de (31) en las condiciones de frontera de Dirichlet (13) considerando el estimado (32) produce un sistema homogéneo de ecuaciones funcionales acopladas conocido como las ecuaciones de Maluzhinets. Si una función $s(z)$ satisface las ecuaciones de Maluzhinets, satisface el estimado (32) y no tiene singularidades en la banda $|Re z| \leq \phi$ excepto por el polo simple en $z = \phi_0$, entonces la integral (31) con tal función $s(z)$ es la solución al problema de difracción considerado y se reduce a (Osipov & Norris, 1999):

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+ + \gamma_-}^{\square} \frac{\mu \cos \mu \phi_0}{\sin \mu(z + \varphi) - \sin \mu \phi_0} e^{-ikr \cos(z)} dz \quad (33)$$

Donde, $\mu = \pi(2\phi)^{-1}$. En otras palabras, el problema de la difracción se reduce a un problema de funciones analíticas. Además, existe una correspondencia entre las ondas planas que se propagan en el exterior de la cuña y los polos (simples) de la función $s(z)$. En particular la onda incidente $u^{inc} = e^{-ikr \cos(\phi - \phi_0)}$ corresponde al polo (con residuo uno) en $z = \phi_0$, con la condición $-\phi < \phi_0 < \phi$. En el caso general de cuña con impedancia en las caras, el campo en el dominio angular presentado aquí está gobernado por la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)u = 0$$

Y es excitado por una onda plana incidente $u^{inc}=e^{ikr\cos(\phi-\phi_0)}$. La solución se busca en la forma de una integral de Sommerfeld del tipo:

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+}^{\infty} e^{-ikr\cos(z)} [s(\varphi+z) - s(\varphi-z)] dz \quad (34)$$

La cual sometida a la condición de frontera correspondiente a impedancia en las caras (tercera condición de frontera) lleva a un sistema no homogéneo de ecuaciones de Malyuzhinets. Puede mostrarse que finalmente la solución del llamado problema de Malyuzhinets puede expresarse (Baibich, Lyalinov & Grikurov, 2008) en la forma:

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+}^{\infty} \frac{\psi_0(z)}{\psi_0(\varphi_0)} \frac{\mu \cos \mu \varphi_0}{\sin \mu(z+\varphi) - \sin \mu \varphi_0} e^{-ikr\cos(z)} dz \quad (35)$$

Donde se requiere el cálculo de la así llamada, función de Malyuzhinets:

$$\psi_\phi(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cosh(z\zeta) - 1}{\zeta \cosh(\frac{\zeta}{2}\zeta) \sinh(2\phi\zeta)} d\zeta \right] \quad (36)$$

IV. Métodos asintóticos

Cuando las dimensiones de los objetos radiantes o dispersores son de orden mucho mayor que la longitud de onda de la excitación del campo, pueden usarse métodos asintóticos de alta frecuencia para analizar los problemas que, de otra manera, serían matemáticamente intratables. En el problema general de dispersión de ondas electromagnéticas, la dificultad estriba en obtener soluciones de las ecuaciones de Maxwell bajo condiciones iniciales y condiciones de frontera, que sean útiles desde el punto de vista computacional. La teoría general de alta frecuencia para campos electromagnéticos fue desarrollada por Luneberg en 1944 durante sus conferencias sobre teoría matemática de la óptica en la Universidad de Brown. El mostró que se puede asociar un campo a cada punto de un rayo geométrico y que este posee una expansión asintótica en potencias de $k^{(-1)}$, donde el término principal de la expansión se determina por consideraciones geométricas (Keller, 1985). Dichos coeficientes fueron presentados de manera completa años más tarde (Kline, 1951), y la expansión asintótica del campo asociado a cada punto de un rayo óptico, conocida como expansión de Luneberg-Kline, constituye el fundamento de la Óptica Geométrica clásica [GO]. Posteriormente se desarrollaron dos técnicas que han recibido considerable atención: la Teoría Geométrica de la Difracción [GTD] y la Teoría Física de la Difracción [PTD]. La primera, desarrollada inicialmente por Keller (1957; 1962) y extendida posteriormente por Kouyoumjian y Pathak (Kouyoumjian, 1965; Kouyoumjian & Pathak, 1970, 1974a, 1974b), es una extensión de la óptica geométrica clásica, que da cuenta de los vacíos de esta última introduciendo un mecanismo de difracción (James, 1986). La teoría física de la difracción, introducida por Ufimtsev, complementa la óptica física, considerando la existencia de corrientes de borde no uniformes adicionalmente a las corrientes uniformes de borde de la óptica física (Ufimtsev, 1957; 1958; 1971). La óptica geométrica y la teoría geométrica de la difracción

and it is excited by an incident plane wave $u^{inc}=e^{-ikr\cos(\phi-\phi_0)}$. The solution is searched in the form of a Sommerfeld integral of the type:

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+}^{\infty} e^{-ikr\cos(z)} [s(\varphi+z) - s(\varphi-z)] dz \quad (34)$$

which, submitted to the corresponding boundary condition of the faces impedance (third boundary condition), carries a non-homogeneous system of Malyuzhinets equations. It can be shown that, finally, the solution of the so called Malyuzhinets problem can be expressed in the following way (Baibich, Lyalinov & Grikurov, 2008):

$$u(kr, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_+}^{\infty} \frac{\psi_0(z)}{\psi_0(\varphi_0)} \frac{\mu \cos \mu \varphi_0}{\sin \mu(z+\varphi) - \sin \mu \varphi_0} e^{-ikr\cos(z)} dz \quad (35)$$

where the calculation of the so called Malyuzhinets function is required:

$$\psi_\phi(z) = \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cosh(z\zeta) - 1}{\zeta \cosh(\frac{\zeta}{2}\zeta) \sinh(2\phi\zeta)} d\zeta \right] \quad (36)$$

IV. Asymptotic methods

When the dimensions of the radiant objects (or dispersers) have an order of magnitude higher than the wavelength of the field excitation, it is possible to use high frequency asymptotic methods to analyze the problems that would be unsolvable by any other way. In the general problem related with the scattering of electromagnetic waves, the issue relies on the obtaining of solutions to the Maxwell equations under initial and boundary conditions, useful from the computational point of view. The general high frequency theory for electromagnetic fields was developed by Luneberg in 1944 during his conferences related with the mathematical theory of optics in Brown University. He showed that it is possible to associate a field to each point in a geometric ray and the ray has an asymptotic expansion in powers of $k^{(-1)}$, where the main term of the expansion is determined by geometric considerations (Keller, 1985). These coefficients were presented in a complete form years later by Kline (1951) and the asymptotic expansion of the associated field to each point of an optical ray—known as Luneburg-Kline expansion—is the foundation of the classical geometrical optics. Later, two techniques that have received considerable attention were developed: the *geometrical theory of diffraction* and the *physical theory of diffraction*. The first, initially proposed by Keller (1957; 1962) and later extended by Kouyoumjian and Pathak (Kouyoumjian, 1965; Kouyoumjian & Pathak, 1970, 1974a, 1974b) is an extension of the classical geometrical

optics by considering the vacuums of this latter by introducing a diffraction mechanism (James, 1986). The physical theory of diffraction introduced by Ufimtsev complements the physical optics by considering the existence of non-uniform edge currents in addition to the uniform edge currents of the physical optics (Ufimtsev, 1957; 1958; 1971). The geometrical optics and the geometrical theory of diffraction are high frequency methods based on ray techniques while physical optics and physical diffraction theory are high frequency methods based on base currents. In the problem of scattering of electromagnetic waves in a wedge, the asymptotic solutions to the Maxwell equations are the desired ones under specific initial and boundary conditions, where the spatial wave number —or intensity of the propagation vector, k — tends to infinite (or equivalently the magnitude of the angular frequency, ω tends to infinite). In this section, we present the relevant aspects in the construction of an asymptotic solution for the bi-dimensional canonical problem of **FIGURE 2**.

The geometrical optics presents a model for the propagation of incident and reflected rays in the case of the 2D canonical wedge diffraction problem. In order to obtain an asymptotic solution, the expressions for the corresponding fields to these rays are expressed in terms of the Luneburg-Kline expansion (Ahluwalia, Lewis & Boldersma, 1968). The incident field can be expressed ($k \rightarrow \infty$) as:

$$u^{inc} \sim e^{-ik\psi(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_m(r)}{(i\omega)^m} \quad (37)$$

Where, it is clear that $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ and $\psi(r)$ is the phase function. By submitting the field in (37) to a convenient form of the Maxwell equations (1) to (4) without particular boundary conditions, it can be shown that this field satisfies the eikonal equation (McNamara, 1990):

$$|\nabla\psi|^2 = 1 \quad (38)$$

The eikonal equation provides a convenient description of the phase variation along the propagation road of the high frequency field. Nonetheless, some qualitative information related with the variation of the field amplitude is required (i.e. the transport equation). Indeed, by submitting the expansion (37) to a convenient form of the wave equation (9), the zero order transport equation is obtained:

$$2(\nabla\psi \cdot \nabla)E_0 + (\nabla^2\psi)E_0 = 0 \quad (39)$$

son métodos de alta frecuencia basados en la técnica de rayos, mientras que la óptica física y la teoría física de la difracción son métodos de alta frecuencia basados en corrientes de base. En el problema de difracción de ondas electromagnéticas en una cuña, interesan soluciones asintóticas de las ecuaciones de Maxwell bajo condiciones iniciales y condiciones de frontera específicas, en las que el número de onda espacial —o intensidad del vector de propagación k —, tiende a infinito (o equivalentemente la magnitud de la frecuencia angular ω tiende a infinito). En este apartado se presentan los aspectos relevantes en la construcción de una solución asintótica para el problema canónico bidimensional de la **FIGURA 2**.

La óptica geométrica brinda un modelo para la propagación de rayos incidentes y reflejados en el caso del problema canónico 2D de difracción por una cuña. Para obtener una solución asintótica, las expresiones para los campos correspondientes a estos rayos se expresan en términos de la expansión de Luneburg-Kline (Ahluwalia, Lewis & Boldersma, 1968). El campo incidente puede expresarse ($k \rightarrow \infty$):

$$u^{inc} \sim e^{-ik\psi(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_m(r)}{(i\omega)^m} \quad (37)$$

Donde es claro que $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ y $\psi(r)$ es la función de fase. Al someter el campo (37) a una forma conveniente de las ecuaciones de Maxwell (1) a (4) sin unas condiciones de frontera particulares en mente, se puede mostrar que este campo satisface la ecuación eikonal (McNamara, 1990):

$$|\nabla\psi|^2 = 1 \quad (38)$$

La ecuación eikonal provee una conveniente descripción de la variación de la fase a lo largo del camino del campo de alta frecuencia; sin embargo, también se requiere información cuantitativa sobre la variación de la amplitud del campo, esto es, la ecuación de transporte. En efecto al someter la expansión (37) a una forma conveniente de la ecuación de onda (9), se obtiene la ecuación de transporte de orden cero:

$$2(\nabla\psi \cdot \nabla)E_0 + (\nabla^2\psi)E_0 = 0 \quad (39)$$

Y también se puede obtener la ecuación de transporte de orden superior (Kouyoumjian, 1965):

$$2(\nabla\psi \cdot \nabla)E_m + (\nabla^2\psi)E_m = -v(\nabla^2)E_{m-1} \quad (40)$$

Para obtener la forma en que se propaga el campo se deben resolver las ecuaciones de transporte (39) y (40). En la práctica solo es necesario resolver (39) ya que (40) es un sistema iterativo de ecuaciones para encontrar u^m en términos de u^{m-1} (correspondientes ecuaciones pueden ser halladas para el campo magnético). El campo reflejado puede mostrarse que es proporcional al campo incidente en el punto de difracción multiplicado por un coeficiente de reflexión (Balanis, 1989).

Para incluir los rayos difractados, Keller (1962) propuso una generalización del principio de Fermat: “Un rayo difractado por un borde desde un punto P hasta un punto Q es una curva

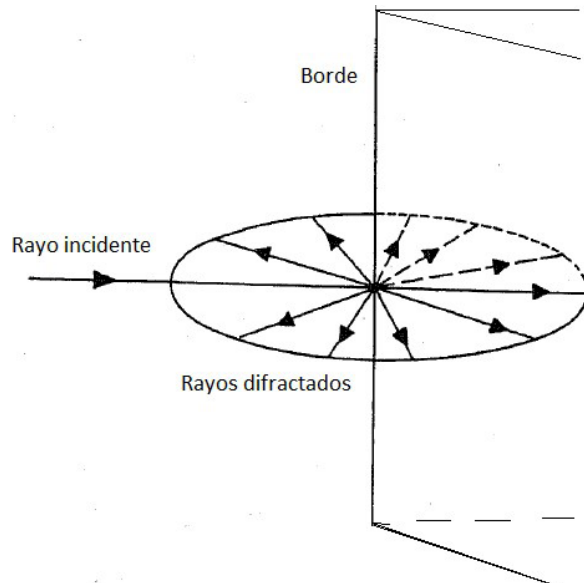


Figure 5. Incident and diffracted rays in the bi-dimensional canonical problem of diffraction in a straight-edge wedge planted in Figure 2 / Rayo incidente y rayos difractados en el problema canónico bidimensional de difracción en una cuña de borde recto planteado en la Figura 2

con longitud óptica estacionaria entre todas las curvas desde P hasta Q con un punto sobre el borde”. De acuerdo con esto, considérese el campo u^d de un rayo difractado desde el borde de la cuña de la FIGURA 2. Puesto que el medio considerado es homogéneo, los rayos viven en líneas rectas y todos los rayos incidentes viven en planos normales al borde. Los rayos difractados también son normales al borde y emanan de él en todas direcciones, con lo que basta considerar solo rayos en un plano normal al borde de la cuña (FIGURA 5). Sea r la distancia desde el punto de observación al borde de la cuña, entonces la fase de un rayo difractado es solo kr mas la fase ψ_i del rayo incidente en el borde. El flujo a través de un tubo de rayos bidimensional es proporcional a rA^2 y, dado que dicho flujo debe ser constante, la amplitud $A(r)$ debe ser proporcional a $r^{-(1/2)}$. Además, la amplitud también debe ser proporcional a la amplitud del rayo incidente en el borde A_i , con lo que se puede escribir (Keller, 1962):

$$u^d = DA_i r^{-\frac{1}{2}} e^{-i(kr+\psi_i)} = Du_0 r^{-\frac{1}{2}} e^{-i(kr)} \quad (41)$$

Al comparar el resultado (41) con la solución exacta de Sommerfeld para el caso considerado cuando la solución es asintóticamente expandida (30) para grandes valores de kr , los resultados coinciden siempre que el coeficiente D coincida con:

$$D = \frac{e^{\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{n}}}{n\sqrt{2\pi k}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} - \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] \quad (42)$$

El signo entre los dos paréntesis dentro del corchete depende de las condiciones de frontera exigidas al borde en la solución exacta, en este caso, corresponde a las condiciones de frontera suaves dadas en (12). El acuerdo confirma la solución asintótica y también determina el coeficiente de difracción para el caso considerado.

Also, it is possible to obtain the transport equation of superior order (Kouyoumjian, 1965)

$$2(\nabla\psi \cdot \nabla)E_m + (\nabla^2\psi)E_m = -v(\nabla^2)E_{m-1} \quad (40)$$

In order to obtain the shape in that field propagates, the transport equations (39) and (40) have to be solved. In the practice, it is only necessary to solve (39), because (40) is an iterative equation system to find u_m in terms of u_{m-1} (corresponding equations can be found for the magnetic field). The reflected field is proportional to the incident one in the diffraction point multiplied by a reflection coefficient (Balanis, 1989).

In order to include diffracted rays, Keller (1962) proposed a generalization of the Fermat principle: “a scattered ray by an edge from a P point to a Q point is a curve with stationary optical longitude between all the curves, from P to Q with a point over the edge”. According to this, let the u^d field of a diffracted ray from the edge of the wedge in FIGURE 2. Given the fact that the considered medium is homogeneous, the rays live in straight lines, and all the incident rays live in normal planes in the edge. The scattered rays are also normal relative to the edge and are originated from it in all directions, missing only the consideration of the rays only in a normal plane at the edge of the wedge (Figure 5).

Let r the distance from the observation point to the edge of the wedge, hence, the phase of a diffracted ray is only kr plus the ψ_i phase of the incident ray in the edge. The flow through a bi-dimensional ray tube is proportional to rA^2 and, given the fact that this flow has to be constant, the amplitude $A(r)$ must be proportional to $r^{-(1/2)}$. Besides, the amplitude also has to be proportional to the amplitude of the incident ray A_i in the edge. With these considerations, it is possible to express u^d as follows (Keller, 1962):

$$u^d = DA_i r^{-\frac{1}{2}} e^{-i(kr+\psi_i)} = Du_0 r^{-\frac{1}{2}} e^{-i(kr)} \quad (41)$$

By comparing the result in (41) with the exact solution of the Sommerfeld equation for the considered case when the solution is asymptotically expanded (30) for large kr values, the results match if the D coefficient equals to:

$$D = \frac{e^{\frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{n}}}{n\sqrt{2\pi k}} \left[\left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n} \right)^{-1} - \left(\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n} \right)^{-1} \right] \quad (42)$$

The sign between the two parenthesis inside the bracket, depends on the demanded boundary conditions at the edge in the exact solution. In this case, it matches with the

soft boundary conditions given by (12). This confirm the asymptotic solution and also determines the diffraction coefficient for the considered case.

In general terms, the asymptotic methods are used to expand functions by assessing integrals and solving differential equations. These methods increase the accuracy when a parameter is near to a limit value (Kouyoumjian, 1965). Integrals of the following type are found when the development of these methods is done in a frequent way:

$$I(K) = \int_C F(z) e^{iKf(z)} dz$$

where $f(z)$ is an analytic function, $F(z)$ is a well-behaved function, C is an adequate contour in the complex plane Z , and an asymptotic approximation of this integral for large $|K|$ values is desired. This can be done by a stationary phase method, which depends on the exponential factor in the integrand. If the contour C is deformed when passing the z_s stationary point through a road with a steepest descent or a stationary phase road, the main contribution of the integral occurs in the vicinity of the stationary point z_s in $f(z)$. The real part of $Kf(z)$ is constant along the steepest descent contour and the imaginary part of $Kf(z)$ is constant along the stationary phase contour. The main term of the asymptotic expansion for each contour is found by expanding $f(z)$ into Taylor series, by cutting the series in the second order term, and adjusting $F(z) \sim F(z_s)$ in the vicinity of z_s . Detailed descriptions of the stationary phase method and other asymptotic techniques can be seen in Erdelyi (1956), Morse and Feshbach (1953), and Smith (1953). Through these techniques, the Keller solution —previously presented— can be extended to a more general expression, that corrects the deficiencies of the Keller model in the vicinity of the caustics (Pathak & Kouyoumjian, 1970). This development is known as *Uniform Theory of Diffraction* [UTD]. The diffracted field in this model is like (41) and the corresponding diffraction coefficient is ($L=r$):

$$D^{UTD} = \frac{-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \cot\left(\frac{\pi-\xi^-}{2n}\right) F[kLg^+(\xi^-)] + \cot\left(\frac{\pi+\xi^-}{2n}\right) F[kLg^-(\xi^-)] - \cot\left(\frac{\pi-\xi^+}{2n}\right) F[kLg^+(\xi^+)] - \cot\left(\frac{\pi+\xi^+}{2n}\right) F[kLg^-(\xi^+)] \right\} \quad (43)$$

where, $\xi^+ = \phi + \phi_0$, $\xi^- = \phi - \phi_0$, and $F(X)$ is the Fresnel function given by:

$$F(X) = 2i\sqrt{X} e^{iX} \int_{\sqrt{X}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \quad (44)$$

Besides,

$$g^{\pm}(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{2n\pi N^{\pm} - \xi}{2}\right), \quad N^{\pm} = \frac{\pm\pi + \xi}{2n\pi} \quad (45)$$

En términos generales, los métodos asintóticos son métodos para expandir funciones, evaluando integrales y resolviendo ecuaciones diferenciales, los cuales incrementan la precisión cuando algún parámetro se aproxima a un valor límite (Kouyoumjian, 1965). Al desarrollar estos métodos asintóticos frecuentemente se encuentran integrales del tipo:

$$I(K) = \int_C F(z) e^{iKf(z)} dz$$

Donde, $f(z)$ es una función analítica, $F(z)$ es una función bien comportada, C es un contorno adecuado en el plano complejo Z , y se desea obtener una aproximación asintótica de esta integral para grandes valores de $|K|$. Esto puede hacerse por un método de fase estacionaria, el cual depende del factor exponencial en el integrando. Si el contorno C es deformado para pasar por el punto estacionario z_s mediante un camino de caída brusca o un camino de fase estacionaria, la principal contribución a la integral ocurre en la vecindad del punto estacionario z_s de $f(z)$. La parte real de $Kf(z)$ es constante a lo largo de un contorno de caída brusca y la parte imaginaria de $Kf(z)$ es constante a lo largo de un contorno de fase estacionaria. El termino principal de la expansión asintótica para cada contorno se encuentra expandiendo $f(z)$ en series de Taylor, cortando la serie en el término de segundo orden y ajustando $F(z) \sim F(z_s)$ en la vecindad de z_s . Descripciones detalladas del método de fase estacionaria y otras técnicas asintóticas pueden verse en Erdelyi (1956), Morse y Feshbach (1953) y Smith (1953). Mediante estas técnicas, la solución de Keller presentada más arriba puede ser extendida a una expresión más general, que corrige las deficiencias del modelo de Keller en la vecindad de las causticas (Pathak & Kouyoumjian, 1970). Este desarrollo se conoce como *Teoría Uniforme de la Difracción* [UTD]. El campo difractado en este modelo es como (41) y el coeficiente de difracción correspondiente es ($L=r$):

$$D^{UTD} = \frac{-e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \cot\left(\frac{\pi-\xi^-}{2n}\right) F[kLg^+(\xi^-)] + \cot\left(\frac{\pi+\xi^-}{2n}\right) F[kLg^-(\xi^-)] - \cot\left(\frac{\pi-\xi^+}{2n}\right) F[kLg^+(\xi^+)] - \cot\left(\frac{\pi+\xi^+}{2n}\right) F[kLg^-(\xi^+)] \right\} \quad (43)$$

Donde, $\xi^+ = \phi + \phi_0$, $\xi^- = \phi - \phi_0$, y $F(X)$ es la función de Fresnel dada por:

$$F(X) = 2i\sqrt{X} e^{iX} \int_{\sqrt{X}}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau \quad (44)$$

Además,

$$g^{\pm}(\xi) = 2\cos^2\left(\frac{2n\pi N^{\pm} - \xi}{2}\right), \quad N^{\pm} = \frac{\pm\pi + \xi}{2n\pi} \quad (45)$$

Tanto para la solución de la teoría geométrica de la difracción (41), como para la solución de la teoría uniforme de la difracción (43), el campo total en el dominio angular se obtiene sumando las componentes de la óptica geométrica, según la región (FIGURA 2):

$$\frac{u_s}{u_0} = \frac{u_s^d}{u_0} + u_s^{GO} \quad (46)$$

$$u_s^{GO} = \begin{cases} e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} + e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)} & 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \text{ Region I} \\ e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} & \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0 \text{ Region II} \\ 0 & \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha \text{ Region III} \end{cases} \quad (47)$$

El tema crítico en UTD es el computo de la integral de Fresnel.

Otro método que provee una correcta aproximación de primer orden del campo difractado para $kr \gg 1$ y $kr_0 \gg 1$ es el método de la ecuación parabólica. Aquí, Hacivelioglu, Uslu y Sevgi (2011):

$$u_s^{d,EP} = u_0 e^{ikr} W_s(kr, \varphi, \varphi_0) \quad (48)$$

$$W_s(kr, \varphi, \varphi_0) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} [w(kr, \psi_1) + w(kr, \psi_2)] \quad (49)$$

$$w(kr, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{-krs^2}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\eta+\psi}{n}\right)} ds \quad (50)$$

$\psi_{1,2} = \varphi - \varphi_0$ y $\eta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}s$. Igual que antes el campo total se obtiene sumando las componentes de la óptica geométrica según la región (47):

$$\frac{u_s^{EP}}{u_0} = \frac{u_s^{d,EP}}{u_0} + u_s^{GO} \quad (51)$$

El tema crítico en este método es el computo de la integral (50). A manera de ejemplo, en el apartado siguiente se utiliza una herramienta de simulación desarrollada recientemente para comparar la solución exacta (28) con la solución asintótica (51) y discutir la dependencia con la frecuencia.

V. Herramientas de simulación

WedgeGUI es una herramienta de simulación en MATLAB que fue desarrollada para la investigación de la difracción por borde de cuña en dos dimensiones mediante métodos asintóticos de alta frecuencia y métodos exactos (Hacivelioglu, Uslu, & Sevgi, 2011). La herramienta permite simular situaciones de iluminación por haz incidente de ambas caras o de una sola cara. En la herramienta, α es el ángulo exterior de la cuña y φ_0 es el ángulo de incidencia del haz considerado. Esta herramienta ha permitido realizar estudios comparativos de técnicas asintóticas (Hacivelioglu, Sevgi & Ufimtsev, 2011), al igual que evaluaciones numéricas de fórmulas para problemas canónicos de dispersión por cuñas (Hacivelioglu, Sevgi & Ufimtsev, 2013). En el presente estudio se analiza la difracción de ondas planas por una cuña de ángulo exterior 350 grados y los ángulos de incidencia de 30, 45, 60 y 75 grados, correspondientes a la condición de iluminación de una sola cara. La frecuencia de la onda es 30MHz, la Fuente está a 100m del borde, el punto de observación a 50m y se consideran las condiciones de frontera de Dirichlet (12).

VI. Resultados y discusión

Los resultados de la simulación planteada se muestran en las Figuras 6 y 7. Puede verse que las predicciones del

Both for the solution of the geometrical theory of diffraction (41) and for the uniform theory of diffraction (43), the total field in the angular domain is obtained by adding the components of the geometrical optics, following the region (FIGURE 2):

$$\frac{u_s}{u_0} = \frac{u_s^d}{u_0} + u_s^{GO} \quad (46)$$

$$u_s^{GO} = \begin{cases} e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} + e^{-ikr\cos(\varphi+\varphi_0)} & 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0 \text{ Region I} \\ e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} & \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0 \text{ Region II} \\ 0 & \pi + \varphi_0 \leq \varphi \leq \alpha \text{ Region III} \end{cases} \quad (47)$$

The critical topic in the UTD is the calculation of the Fresnel integral. Another method that provides a correct first order approximation of the diffracted for $kr \gg 1$ and $kr_0 \gg 1$ is the parabolic equation method. Here, (Hacivelioglu, Uslu, and Sevgi 2011):

$$u_s^{d,EP} = u_0 e^{ikr} W_s(kr, \varphi, \varphi_0) \quad (48)$$

$$W_s(kr, \varphi, \varphi_0) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} [w(kr, \psi_1) + w(kr, \psi_2)] \quad (49)$$

$$w(kr, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) e^{-krs^2}}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{\eta+\psi}{n}\right)} ds \quad (50)$$

With $\psi_{1,2} = \varphi - \varphi_0$ y $\eta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}s$. Just like before, the total field is obtained by adding the components of the geometrical optics given the region (47):

$$\frac{u_s^{EP}}{u_0} = \frac{u_s^{d,EP}}{u_0} + u_s^{GO} \quad (51)$$

The critical topic in this method is the calculation of the integral in (50). For instance, in the following section, we use a simulation tools recently developed to compare the exact solution (28) with the asymptotic solution (51) and discuss the dependence with the frequency.

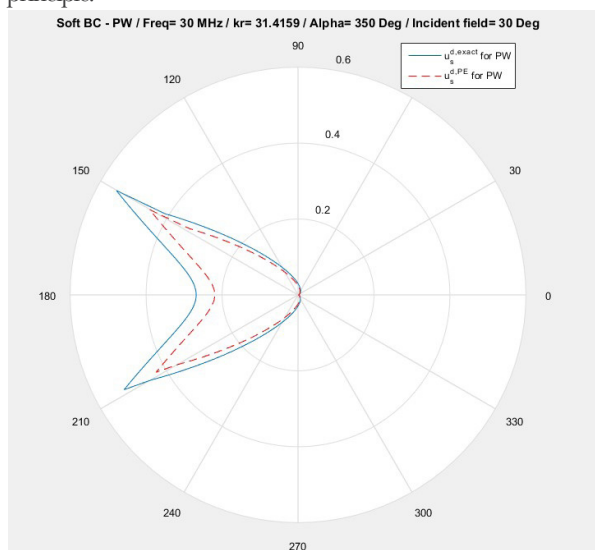
V. Simulation tools

WedgeGUI is a simulation tools in MATLAB that was developed for the research of the diffraction by a 2D wedge edge through high frequency asymptotic methods and exact models (Hacivelioglu, Uslu, & Sevgi, 2011). The tool allows the simulation of situations with illumination by incident beams either in single-side or in double-side. In the tool, α is the exterior angle of the wedge and φ_0 is the incidence angle of the considered beam. This tool has allowed researchers to perform comparative studies of asymptotic techniques (Hacivelioglu, Sevgi & Ufimtsev, 2011), besides of numerical evaluations of formulas for canonical problems related with wedge scattering (Hacivelioglu, Sevgi & Ufimtsev, 2013). In the present study, we analyzed the plane waves diffraction for a wedge with a 350-degrees exterior angle and incidence angles of 30, 45, 60, and 75 degrees. These

values correspond to the single-side illumination condition. The frequency of the wave is 30 MHz and the source is located at 100 meters of the edge; the observation point is at 50 meters and we considered the Dirichlet boundary conditions (12).

V. Results and discussion

The results of the described simulation are shown in **FIGURE 6** and **FIGURE 7**. It can be seen that the predictions of the asymptotic model are lower than the calculated ones with the exact solution. This discrepancy is due to the fact that the asymptotic solutions only consider the dominant terms of the expansion and, consequently, they produce values under the exact solution ones. Now, given the fact that these are approximate solutions to the exact ones through the expansion of series for high frequency, it is possible to show that the difference is reduced for higher frequency values. For example, when the frequency is increased in an order of magnitude, a better agreement between the predictions of the two solutions is observed, as **Figure 8** presents the predictions for 30 and 60 degrees with a frequency of 300 MHz. It is noticeable that, in some directions, the solutions match. That is, when the frequency is increased in an order of magnitude, the agreement between the predictions of the solutions is higher. This proves the sensibility of the accuracy in the asymptotic methods with the frequency. An additional topic is to review if the implemented methods comply with the reciprocity principle; for that, we performed simulations for angles corresponding to two-side illumination condition. **Figure 9** presents the results for angles of 150 and 120 degrees. When compared with the results in **Figure 8**, the reader might deduce that, both the exact solution and the asymptotic one satisfy the reciprocity principle.



método asintótico son menores que las calculadas con la solución exacta. Ésta discrepancia obedece al hecho que las soluciones asintóticas solo consideran los términos dominantes de la expansión y, por tanto, producen soluciones que se aproximan por debajo a la solución exacta. Ahora bien, puesto que son aproximaciones a las soluciones exactas mediante una expansión en series para altas frecuencias, puede verificarse que la diferencia disminuye para valores mayores de frecuencia. Por ejemplo, al aumentar la frecuencia en un orden de magnitud se observa un mejor acuerdo entre las predicciones de las dos soluciones, como puede verse en la **FIGURA 8**, donde se muestran las predicciones para 30 y 60 grados, con una frecuencia de 300MHz, y es evidente que en algunas direcciones las soluciones coinciden. Es decir, al aumentar la frecuencia en un orden de magnitud, el acuerdo entre las predicciones de las soluciones es mucho mayor, con lo que se verifica la sensibilidad de la precisión de los métodos asintóticos con la frecuencia. Una cuestión adicional es revisar si los métodos implementados atienden el principio de reciprocidad; para ello, se realizaron simulaciones para ángulos correspondientes a condición de iluminación de dos caras. La **FIGURA 9** muestra los resultados para ángulos de 150 y 120 grados, al compararse con los resultados de la **FIGURA 8** se encuentra que, tanto la solución exacta, como la solución asintótica, satisfacen el principio de reciprocidad.

VII. Conclusiones

Se ha revisado el desarrollo de la solución exacta de Sommerfeld del problema canónico 2D de difracción por una cuña, desde su planteamiento inicial, mediante condiciones de frontera de Dirichlet o de Newman, hasta la formulación general del problema 2D por

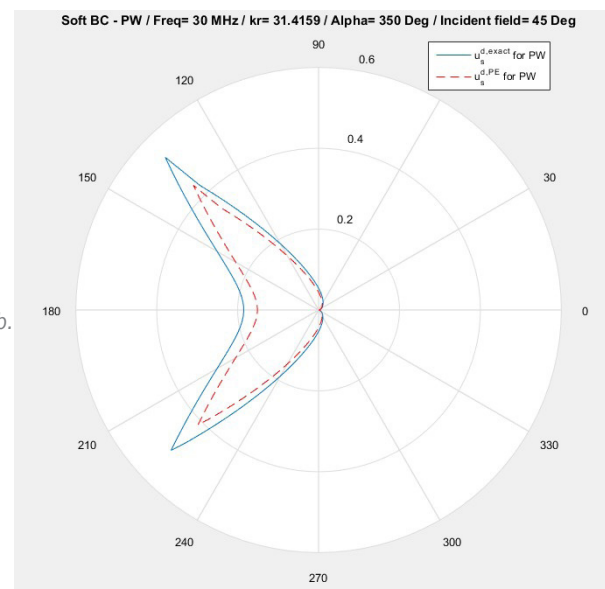


Figure 6. Polar distribution of the diffracted field intensity, normalized in function of the observation angle for the predictions of the exact solution and the parabolic equation method in case of incidence angle of 30 and 45 degrees / Distribución polar de la intensidad del campo difractado, normalizada en función del ángulo de observación para las predicciones de la solución exacta y del método de la ecuación parabólica, en el caso de ángulo de incidencia 30 y 45 grados

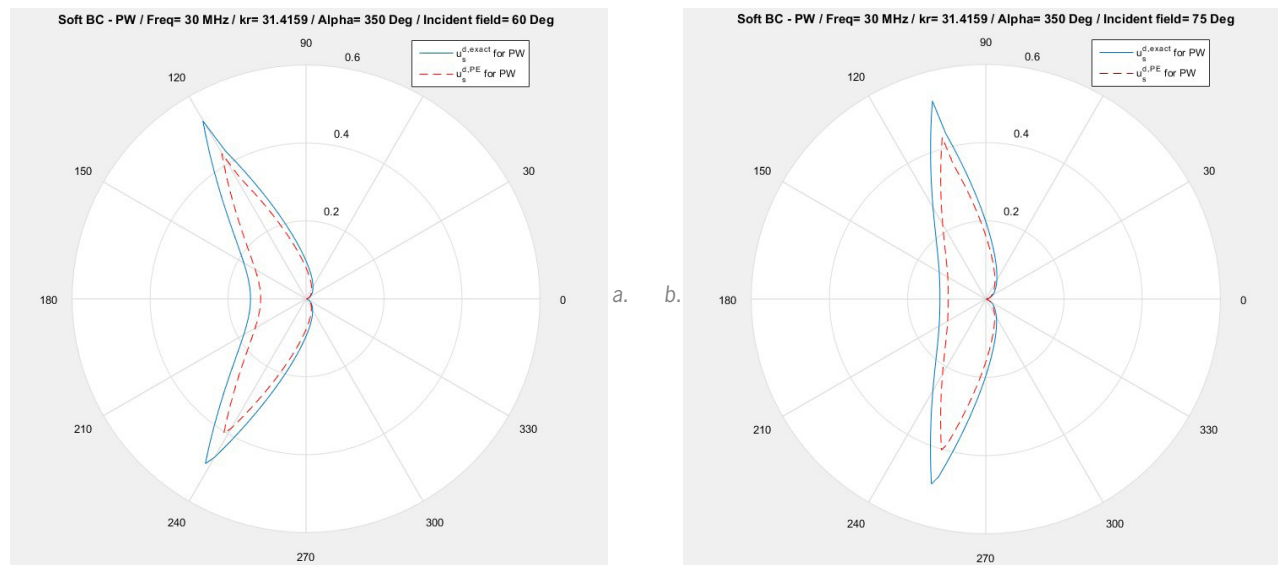


Figure 7. Polar distribution of the diffracted field intensity, normalized in function of the observation angle for the predictions of the exact solution and the parabolic equation method in case of incidence angle of 60 and 75 degrees / Distribución polar de la intensidad del campo difractado, normalizada en función del ángulo de observación para las predicciones de la solución exacta y del método de la ecuación parabólica, en el caso de ángulo de incidencia 60 y 75 grados

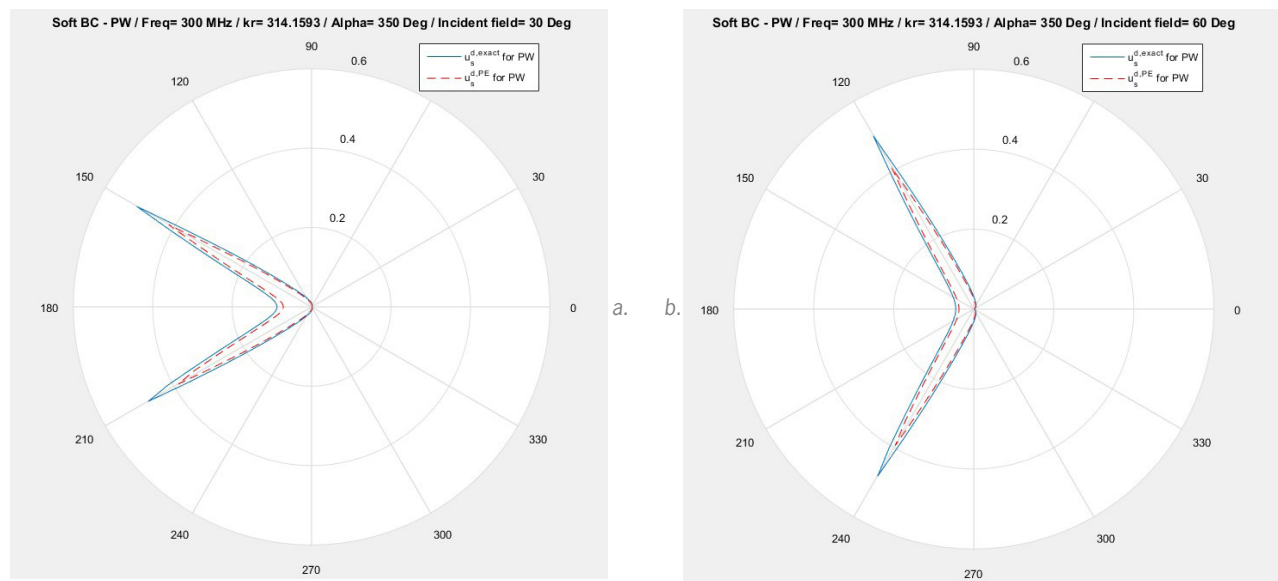


Figure 8. Polar distribution of the diffracted field intensity, normalized in function of the observation angle for the predictions of the exact solution and the parabolic equation method in case of incidence angle of 30 and 45 degrees; the frequency has been increased in an order of magnitude / Distribución polar de la intensidad del campo difractado, normalizada en función del ángulo de observación para las predicciones de la solución exacta y del método de la ecuación parabólica, en el caso de ángulo de incidencia 30 y 60 grados; la frecuencia se ha incrementado en un orden de magnitud

Malyuzhinets, en donde se considera la tercera condición de frontera de impedancia en las caras. La solución exacta para el caso canónico 2D de difracción por una cuña con caras perfectamente conductoras ha sido presentada de manera general para la componente del campo eléctrico en la dirección del borde de la cuña. El cálculo se ha llevado detalladamente, iniciando con la conveniente expresión de las ecuaciones de Maxwell en términos de potenciales, continuando con la formulación de la ecuación de onda correspondiente al campo total en el dominio angular y finalizando con la solución de la ecuación de onda sobre las condiciones de fron-

VII. Conclusions

We have reviewed the development of the Sommerfeld exact solution of the 2D canonical problem of wedge diffraction, from its initial approach —through Dirichlet or Newman boundary conditions—, up to the general formulation of the 2D problem by Malyuzhinets, where the third boundary condition of faces impedance is considered. The exact solution for the 2D canonical case of wedge diffraction with perfectly conductive faces has been presented in a general form using the electric field component in the direction of the edge of the wedge. The

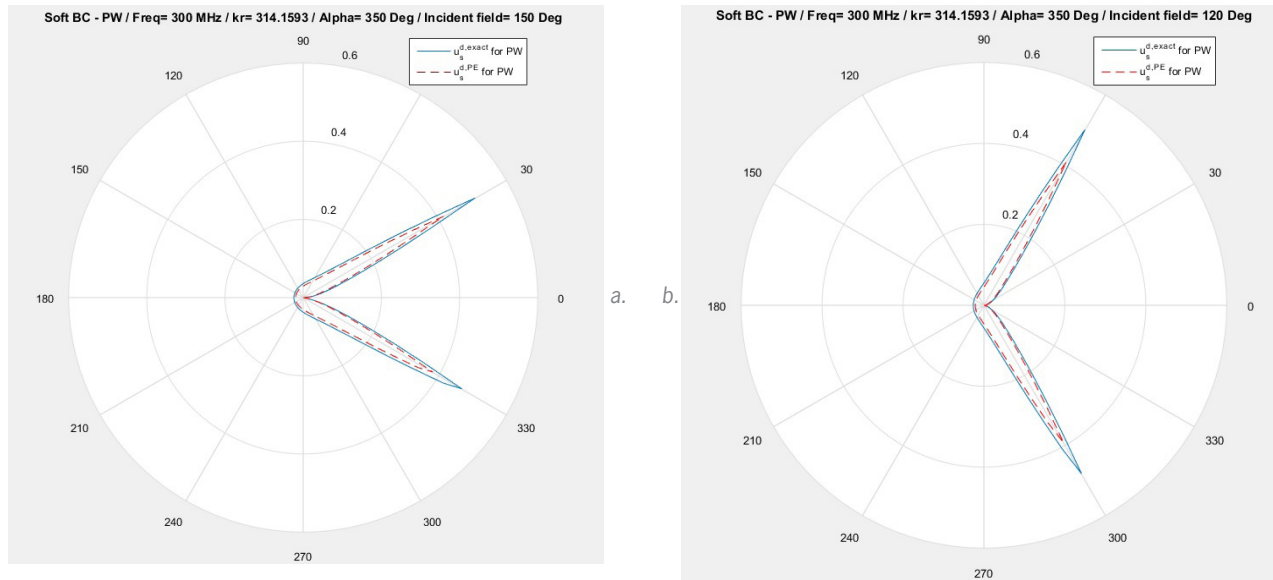


Figure 7. Polar distribution of the diffracted field intensity, normalized in function of the observation angle for the predictions of the exact solution and the parabolic equation method in case of incidence angle of 60 and 75 degrees / Distribución polar de la intensidad del campo difractado, normalizada en función del ángulo de observación para las predicciones de la solución exacta y del método de la ecuación parabólica, en el caso de ángulo de incidencia 60 y 75 grados

calculation has been performed in a detailed way, starting with the convenient expression of the Maxwell equations in terms of potentials, and continuing with the formulation of the corresponding wave equation of the total field in the angular domain. The approach finishes with the solution of the wave equation over the Dirichlet boundary conditions. We have obtained a solution in terms of Bessel and Hankel, finally expressed in a series. This series allows, on one hand, the numerical assessment of the solution; on the other hand, it allows the presentation of the asymptotic expansions of the solution. We have used the integral formulation of the problem in order to introduce the Malyuzhinets developments and propose the canonical problem in a general form, i.e., through the third boundary condition. We also reviewed the development of the asymptotic solutions from the geometrical optics topics and passing by the geometric theory of diffraction; this, to achieve more general methods to the asymptotic solutions currently being used. We also presented a discussion of the Keller solution of the considered canonical problem and we used this formulation as a framework to introduce the results of the uniform theory of diffraction and the parabolic equation method. To complete this study, we presented a simulation tool that allowed us to compare the numerical predictions for the exact solution and the solution using the parabolic equation method. The simulation results show the good agreement between the predictions, validating the importance of the asymptotic methods from the processing point of view, and also showing clearly the sensitivity of these methods with the frequency. Additionally, we reviewed that the implemented methods satisfy the reciprocity principle. *ST*

tera de Dirichlet. Se ha obtenido una solución en términos de funciones de Bessel y Hankel, que finalmente se expresa mediante una serie. Esta serie permite, por un lado, evaluar numéricamente la solución y, por otro, presentar las expansiones asintóticas de la solución. Se ha utilizado la formulación integral del problema, para introducir los desarrollos de Malyuzhinets y plantear el problema canónico en forma general, esto es, mediante la tercera condición de frontera. A continuación se ha revisado el desarrollo de las soluciones asintóticas, desde los planteamientos de la óptica geométrica, pasando por la teoría geométrica de la difracción, hasta llegar a los métodos generales para desarrollar soluciones asintóticas que se trabajan en la actualidad. Se ha presentado una discusión de la solución de Keller del problema canónico considerado y se ha utilizado esta formulación como marco para introducir los resultados de la teoría uniforme de la difracción y el método de la ecuación parabólica. Para completar este estudio, se ha presentado una herramienta de simulación, que ha permitido comparar las predicciones numéricas para la solución exacta y la solución por el método de la ecuación parabólica. Los resultados de la simulación muestran el buen acuerdo entre las predicciones, validando la importancia de los métodos asintóticos desde el punto de vista de procesamiento y mostrando claramente la sensibilidad de estos métodos con la frecuencia. Adicionalmente se revisó que los métodos implementados satisfacen el principio de reciprocidad. *ST*

References / Referencias

- Aboserwal, N. & Balanis, C. (2014). Closed-form expression of the Maliuzhinets function using tanh-sinh quadrature rule. In: *Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)*. IEEE.
- Ahluwalia, D., Lewis, R., & Boldersma, J. (1968). Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen. *SIAM Journal on applied mathematics*, 16(4), 783-807.
- Ambaud, P. & Bergassoli, A. (1972). The problem of the wedge in acoustics. *Acta Acustica united with Acustica*, 27(5), 291-298.
- Baibich, V., Lyalinov, M. & Grikurov, V. (2008). *Diffraction theory, the Sommerfeld-Malyuzhinets technique* [Alpha Science series on wave phenomena]. Oxford, UK: Alpha Science.
- Balanis, C. (1989). *Advanced engineering electromagnetic*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Bowman, J. & Senior, T. (1969). The wedge. In: *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes* (pp. 252-283). Amsterdam, The Netherlands: North Holland.
- Copson, E. (1965). *Asymptotic expansions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- DeWitt-Morette, C., Low, S., Schulman, L., & Shiekh, A. (1986). Wedges I. *Foundations of Physics* 16(4), 311-349.
- Erdgylı, A. (1956). *Asymptotic expansions*. New York, NY: Courier.
- Felsen, L. & Marcuvitz, N. (1978). *Radiation and scattering of waves*. New York, NY: Prentice Hall.
- Filippov, A. (1967). Investigation of solution of a nonstationary problem of diffraction of a plane wave by an impedance wedge, *Zh. Vych. Matem. i Mat. Fiziki* 7, 825-835.
- Guevara, D., & Navarro, A. (2011). *Estimación de parámetros de canal en entornos 3D* [tesis]. Universidad Pontificia Bolivariana: Medellín, Colombia.
- Hacivelioglu, F., Sevgi, L., & Ufimtsev, P. (2011). Electromagnetic wave scattering from a wedge with perfectly reflecting boundaries: Analysis of asymptotic techniques. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 53(3), 232-253.
- Hacivelioglu, F., Sevgi, L., & Ufimtsev, P. (2013). Numerical evaluations of diffraction formulas for the canonical wedge-scattering problem. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 55(5), 257-272.
- Hacivelioglu, F., Uslu, M., & Sevgi, L. (2011). A MATLAB-based virtual tool for the electromagnetic wave scattering from a perfectly reflecting wedge. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 53(6), 234-243.
- Hadden, W. & Pierce, A. (1981). Sound diffraction around screens and wedges for arbitrary point source locations. *Journal of the Acoustical Society of America*, 69(5), 1266-1276.
- Herman, M., Volakis, J., & Senior, T. (1987). Analytic expressions for a function occurring in diffraction theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 35(9), 1083-1086.
- Hongo, K. & Nakajima, E. (1986). Polynomial approximation of Malyuzhinets function. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(7), 942-947.
- James, G. (1986). *Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves* [3rd ed.]. London, UK: Peter Peregrinus.
- Keller, J. (1957). Diffraction by an aperture. *J. Appl. Phys*, 28(4), 426-444.
- Keller, J. (1962). Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Amer*, 52(2), 116-130.
- Keller, J. (1985). One hundred years of diffraction theory. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 33(2), 123-126.
- Kline, M. (1951). An asymptotic solution of Maxwell's equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 4(2-3), 225-262.
- Kouyoumjian, R. (1965). Asymptotic high frequency methods. *Proceedings of the IEEE*, 53(8), 864-876.
- Kouyoumjian, R. & Pathal, P. (1974). A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting Surface. *Proceedings of the IEEE*, 62(11), 1448-1461.
- MacDonald, H., (1902). *Electric waves*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- MacNamara, D. (1990). *Introduction to the uniform geometrical theory of diffraction*. Norwood, MA: Artech House.
- Malyuzhinets, D. (1955). Radiation of sound from the vibrating faces of an arbitrary wedge [part II]. *Sov. Phys. Acoust*, 1, 240-248.
- Malyuzhinets, D. (1955). The radiation of sound by the vibrating boundaries of an arbitrary wedge [part I]. *Sov. Phys. Acoust*, 1, 152-174.
- Malyuzhinets, D. (1958). Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances. *Sov. Phys. Dokl*, 3, 752-755.
- Malyuzhinets, D. (1958). Inversion formula for the Sommerfeld integral. *Sov. Phys. Dokl*, 3, 52-56.
- Malyuzhinets, D. (1958). Relation between the inversion formulas for the Sommerfeld integral and the formulas of Kontorovich-Lebedev. *Sov. Phys. Dokl*, 3, 266-268.
- Malyuzhinets, G. (1950). *Generalization of the reflection method in the theory of diffraction of sinusoidal waves* [thesis]. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences: Moscow.
- Morse, P. & Feshbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Murray, J. (1984). *Asymptotic analysis*. New York, NY: Springer.
- Navarro A., Guevara, D., & Gómez, J. (2014). Modelado de canal inalámbrico utilizando técnicas de trazado de rayos: una revisión sistemática. *Sistemas & Telemática*, 12(30), 87-101.

- Navarro, A., Guevara, D., & Africano, M. (2012). Calibración basada en medidas para modelos de trazado de rayos en 3D para ambientes exteriores urbanos andinos. *Sistemas & Telemática*, 10(21), 43-63.
- Navarro, A., Guevara, D., & Londoño, S. (2014). Using 3D video game technology in channel modeling. *IEEE Access*, 2, 1652-1659.
- Navarro, A., Guevara, D., Tami, D., Rego, C., & Moreira, F. (2015). Heuristic UTD coefficients applied for the channel characterization in an Andean scenario. In: *Antennas and Propagation & USNC/URSI National Radio Science Meeting, 2015 IEEE International Symposium on*. IEEE.
- Navarro, A., Guevara, D., Escalante, D., Cruz, W., Gómez, J., Cardona, N., & Jimenez, J. (2016). Delay spread in mm wave bands for indoor using game engines 3D ray based tools. In: *Antennas and Propagation (EuCAP), 2016 10th European Conference on*. IEEE.
- Oberhettinger, F. (1958). On the diffraction and reflection of waves and pulses by wedges and corners. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 61(5), 343-365.
- Osipov, A. & Norris, A. (1999). The Malyuzhinets theory for scattering from wedge boundaries: A review. *Wave Motion*, 29(4), 313-340.
- Pathak, P. & Kouyoumjian, R. (1970). *The dyadic diffraction coefficient for a perfectly conducting wedge* [technical report 2183-4]. Columbus, OH: Ohio State University.
- Pathak, P., & Kouyoumjian, R. (1974). An analysis for the radiation from apertures on curves surfaces by the geometrical theory of diffraction. *Proceedings of the IEEE*, 62(11), 1438-1447.
- Petrashen, G., Nikolaev, B., & Kouzov, D. (1958). On the method of series in the theory of diffraction of waves from flat angular regions, Leningrad State University scientific reports: *Math. Sci.* 246, 5-165.
- Pierce, A. (1989). *Acoustics: An introduction to its physical principles and applications*. New York, NY: Acoustical Society of America.
- Sakharova, M. (1970). On asymptotic expansion of certain functions occurring in the wedge diffraction theory. *Izv. Vuzov. Fizika*, 11, 141-144.
- Sevgi, L. (2014). *Electromagnetic modelig and simulation*. Hoboken, NJ: Wiley-IEEE.
- Smith, L. (1953). *Mathematical methods for scientists and engineers*. New York, NY: Dover.
- Sommerfeld, A. (1896). Mathematical theory of diffraction. *Math. Ann.* 47, 317-374.
- Sommerfeld, A. (1901). Teoretisches über die beugung der röntgenstrahlen. *Z. Mathem Phys.* 46, 11-97.
- Sommerfeld, A. (1935). Theorie der beugung. In: F. Frank & R.V. Mizes (Eds.), *Die Diferntial- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* [Vol. 2, Physical Part], (Cap. 20). Braunschweig, Germany: Friedr. Vieweg & Sobó.
- Sommerfeld, A. (2004). *Mathematical theory of diffraction*. Boston, MA: Birkhäuser.
- Thide, B. (2003). *Electromagnetic field theory*. Uppsala, Sweden: Upsilon.
- Tuzhilin, A. (1963). New representations of diffraction fields in wedge-shaped regions with ideal boundaries. *Sov. Phys. Acoust.* 9(2), 168-172.
- Tuzhilin, A. (1970). Theory of Malyuzhinets' functional equations I: Homogeneous functional equations, general properties of their solutions, particular cases. *Differencialnye Uravnenija*, 6, 692-704.
- Tuzhilin, A. (1970). Theory of Malyuzhinets' functional equations II: The theory of Barnes' infinite products. General solutions of homogeneous Malyuzhinets' functional equations. Various representations of the basis solutions. *Differencialnye Uravnenija*, 6, 1048-1063.
- Tuzhilin, A. (1971). Theory of Malyuzhinets' functional equations III: Non-homogeneous functional equations, the general theory. *Differencialnye Uravnenija*, 7, 1077-1088.
- Tuzhilin, A. (1973). Diffraction of a plane sound wave in an angular region with absolutely hard and slippery faces covered by thin elastic plates. *Differencialnye Uravnenija*, 9, 1875-1888.
- Ufimtsev, P. (1957). Approximate computation of the diffraction of plane electromagnetic waves a certain metal bodies. *Soviet Physics-Technical Physics*, 2(8), 1708-1718.
- Ufimtsev, P. (1958). Secondary diffraction o electromagnetic waves by a disk. *Soviet Physics-Technical Physics*, 3(3), 549-556.
- Ufimtsev, P. (1971). *Method of edge waves in the physical theory of diffraction* [FTD-HC-23-259-71]. Dayton, OH: U.S. Air Force Systems Command - Foreign Technology Office. Available at: <http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=AD0733203>
- Vico, F., Ferrando, M., Valero, A., Herranz, J., & Antonino, E. (2009). Computational electromagnetics and fast physical optics. *Waves*, 1, 155-161.
- Volakis, V. & Senior, T. (1985). Simple expressions for a function occurring in diffraction theory. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 33(6), 678-680
- Weinberger, H. (1965). *A first course in partial differentials equations with complex variable and transform methods*. New York, NY: Dover.
- Zavadskii, V. & Sakharova, M. (1961). *Tables of the special function 8.z/*. Moscow, Russia: Akust. Inst. Rep.
- Zavadskii, V., & Sakharova, M. (1967). Application of the special function 8 in problems of wave diffraction in wedge-shaped regions, *Sov. Phys. Acoust*, 13, 48-54.

CURRICULUM VITAE

Hernan G. Triana Professor (Physics and Technology Department) and researcher, member of i2t (informatics and telecommunications research group) at the Universidad Icesi (Cali, Colombia). Physicist from the Universidad del Valle (Cali, Colombia), currently pursuing a Master of Research in Computer Science and Telecommunications at the Universidad Icesi. His main areas of interest are: theory of diffraction, computational electromagnetism and radio-propagation / Profesor cátedra del Departamento de Ciencias Físicas y Tecnología y miembro del grupo de investigación en Informática y Telecomunicaciones (i2t) de la Universidad Icesi. Físico de la Universidad del Valle, actualmente cursa la Maestría de Investigación en Informática y Telecomunicaciones en la Universidad Icesi. Sus áreas de interés son: la teoría de la difracción, el electromagnetismo computacional y la radio-propagación.

Andrés Navarro Cadavid Full professor and Director of i2t (informatics and telecommunications research group) at the Universidad Icesi (Cali, Colombia). Electronics Engineer and Master in Technology Management (Universidad Pontificia Bolivariana de Medellín (Colombia), and Ph.D. in Telecommunications (Universidad Politécnica de Valencia, España). His main areas of interest are: spectrum management, radio propagation and m-health / Profesor titular y Director del Grupo de Investigación en Informática y Telecomunicaciones (i2T) de la Universidad Icesi de Cali (Colombia). Es Ingeniero Electrónico y Magister en Gestión de la Tecnología de la Universidad Pontificia Bolivariana de Medellín (Colombia) y Doctor Ingeniero en Telecomunicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (España). Sus áreas de interés son: la gestión del espectro radioeléctrico, la radio-propagación y las soluciones móviles aplicadas a salud.